Nut, Gebruik en Beperkingen van Value-at-Risk voor Risicomanagement

Lucas, A.

1998

Faculteit der Economische Wetenschappen en Econometrie

SERIE RESEARCH MEMORANDA

Nut, Gebruik, en Beperkingen van Value-at-Risk voor Risicomanagement

André Lucas

Research Memorandum 1998-64

December 1998

*vrije*Universiteit *amsterdam*

REVIEW

André Lucas *

Nut, Gebruik, en Beperkingen van Value-at-Risk voor Risicomanagement

Trefwoorden: value-at-risk; risicomanagement; toezicht

Inleiding

Het nemen van risico's is onlosmakelijk verbonden met het ontplooien van activiteiten in financiële markten. Het is dan ook veelal niet de vraag *of* men risico's moet lopen, maar meer hoe men de genomen risico's moet beheersen. Dit is evident wanneer we spreken over beleggingen in zakelijke waarden zoals aandelen. Maar ook wanneer we ons beperken tot vastrentende beleggingscategorieën zoals obligaties, hebben we te maken met risico's, bijvoorbeeld kredietrisico's en renterisico's.

Het efficiënt beheer van risico heeft altijd de aandacht gehad van individuen, het bedrijfsleven en de overheid. De afweging is meestal als volgt samen te vatten: moet men beleggen volgens een relatief risicovolle beleggingsstrategie met een hoog verwacht rendement, dan wel een relatief minder risicovolle strategie met een corresponderend lager verwacht rendement. Zie bijvoorbeeld Markowitz (1952). Het antwoord op deze vraag is niet eenduidig te geven en hangt onder andere af van de risicopreferenties van de belegger, zijn planningshorizon en van allerlei institutionele en juridische beperkingen.

We beperken ons in het vervolg van dit artikel tot risico's met financiële consequenties. Binnen deze categorie van financiële risico's kunnen we onderscheid maken tussen tenminste een achttal subcategorieën, zie bijvoorbeeld de Swaan (1996). Deze subcategorieën zijn achtereenvolgens

1. kredietrisico: risico dat een tegenpartij een betalingsverplichting niet nakomt;

* Postdoctoraal N.W.O. Onderzoeker, vakgroep Financiering en Bedrijfskunde van de Financiële Sector, Vrije Universiteit Amsterdam

De auteur bedankt Bernard Compaijen en Casper de Vries voor waardevolle opmerkingen. Tevens bedankt de auteur N.W.O. voor geldelijke ondersteuning van dit project.

Geschreven op uitnodiging van het *Economisch en Sociaal Tijdschrift*.

2. marktrisico: risico van verliezen ten gevolge van marktbewegingen (rentes, wisselkoersen, aandelenindices) of veranderingen in volatiliteit van de markt;
3. liquiditeitsrisico: risico dat niet op tijd aan een betalingsverplichting kan worden voldaan (bijvoorbeeld 'margin call') dan wel het risico dat een verliesgevende positie niet tijdig kan worden opgeheven door een gebrek aan liquiditeit op de markt;
4. operationeel risico: risico van een verlies veroorzaakt door de uitvoering van een financiële transactie;
5. juridisch risico: risico van een verlies ten gevolge van het niet juridisch afdwingbaar zijn van een vordering op een tegenpartij;
6. politiek risico: risico van een verlies ten gevolge van wijzigingen in het politieke beleid en de institutionele kaders;
7. macro-economisch risico: risico's ten gevolge van macro-economische ontwikkelingen;
8. systeemrisico: risico's die de soliditeit en integriteit van het financiële systeem als geheel aantasten.

In dit artikel zullen we ons met name richten op het marktrisico. Ook zullen we enige aandacht besteden aan kredietrisico. De overige risicocategorieën bespreken we alleen voorzover ze verband houden met de eerste 2 categorieën. Dit wil niet zeggen dat de categorieën 3 tot en met 8 relatief minder belangrijk zijn. Zo was bijvoorbeeld het faillissement van Barings voor het grootste gedeelte te wijten aan de combinatie van marktrisico met operationeel risico, terwijl de grote derivatenstrop voor Metallgesellschaft werd veroorzaakt door een combinatie van marktrisico en liquiditeitsrisico. Verder geldt voor bijvoorbeeld pensioenfondsen met geïndexeerde pensioenverplichtingen dat categorie 7 van groot belang is: perioden van hoge inflatie tasten de solvabiliteit van een pensioenfonds sterk aan. Daarentegen vormt categorie 6 een belangrijke risicocomponent voor bijvoorbeeld individuele pensioenaanspraken: de politieke beslissingen omtrent de instandhouding van de algemene oudedagsvoorziening en van de belastingvoordelen voor pensioensparen in een vergrijzende samenleving kunnen grote individuele inkomensgevolgen hebben wanneer de pensioengerechtigde leeftijd wordt bereikt. Tenslotte is systeemrisico een uitermate belangrijke categorie voor toezichthouders zoals de Centrale Banken. Op dit laatste komen we in het navolgende nog terug.

Hoewel dit artikel zich met name richt op marktrisico, is het beheersen van kredietrisico's daar in zekere zin aan voorafgaand. Geldverstrekkende financiële instellingen houden sinds jaar en dag de kredietwaardigheid van hun debiteuren in de gaten. Het tijdig signaleren van veranderingen in de kredietwaardigheid van een debiteur stelt de instelling in staat adequaat te reageren, hetzij middels het verlangen van additioneel onderpand, het securitizeren van de lening, het verhogen van het rentepercentage op nieuw af te sluiten leningen met deze debiteur, enz. Het is duidelijk dat een dergelijk beleid niet altijd met evenveel succes wordt gevoerd, zodat de post van niet-kredietwaardige leningen zeer omvangrijk kan worden, zie bijvoorbeeld het huidige Japan alsook de bankcrisis in de jaren '30. Niet-kredietwaardige leningen tasten de solvabiliteit van banken aan. Onder bepaalde omstandigheden kan de verslechterde solvabiliteitspositie van banken er de oorzaak van zijn dat depositohouders massaal hun geld terugeisen van de bank, de zogenaamde 'bank runs'. Bank runs zijn desastreus voor de soliditeit en integriteit van de financiële sector in een economie, en daarmee voor de economie als geheel. Het is dan ook niet verwonderlijk dat na de bankcrisis van de jaren 30 beleidsmakers zich ervoor hebben ingezet een herhaling van de toen waargenomen bank runs te voorkomen. Wanneer we ons richten op de V.S., is de belangrijkste beslissing op dit terrein de oprichting van de Federal Deposit Insurance Company (FDIC) geweest. De FDIC garandeert de terugbetaling van deposito's ingeval de bank zelf daartoe niet meer in staat is. Tegenwoordig kennen we in tal van landen dergelijke deposito-garantieregelingen. Teneinde deze regelingen te financieren, wordt een premie geëist van de bij de FDIC verzekerde banken, zie bijvoorbeeld Berger, Herring, and Szergö (1995). Deze aanvankelijk (platte) premie was alleen gerelateerd aan de grootte van de post verzekerde deposito's. Het is een bekend mora1 hazard probleem dat de premiestructuur banken ertoe kan aanzetten meer risicovolle activiteiten te ontplooien: de verwachte hogere rendementen op dergelijke activiteiten komen ten bate van de aandeelhouders dan wel het management, terwijl de lasten ingeval van calamiteiten kunnen worden verhaald op de garantieregeling, d.w.z. de belastingbetalers. Teneinde het risico voor belastingbetalers te beperken alsmede de perverse stimulansen voor banken weg te nemen, zijn in de loop van de tijd verschillende regelingen in werking getreden. Zo zijn er premies ingevoerd gerelateerd aan de risicograad van de door de bank ontplooide activiteiten. Ook hebben risico-gerelateerde kapitaalvereisten hun intrede gedaan naar aanleiding van het Bazels accoord, Bazel (1988). Beide wijzigingen resulteren in een reductie van het genoemde mora1 hazard probleem.

Het Bazels accoord uit 1988 betreft uitsluitend kapitaalvereisten voor de beperking van kredietrisico, de grootste risicopost van veel banken. Destijds was dit accoord vernieuwend, aangezien voor het eerst kapitaalvereisten werden gekoppeld aan de risicograad/kredietwaardigheid van de uitgegeven leningen. Volgens het accoord zijn bijvoorbeeld de kapitaalvereisten voor een door de staat uitgegeven obligatie aanzienlijk lager dan voor een bedrijfsobligatie.

Hoewel kredietrisico nog steeds een belangrijke, zo niet de belangrijkste risicocomponent vormt voor de gemiddelde bank, is er over de afgelopen 20 jaar veel veranderd in het risicomanagement van banken en andere financiële instellingen. Door de voortschrijdende liberalisatie van financiële markten, de ontwikkeling van nieuwe financiële producten en de (mede daardoor) toegenomen volatiliteit van financiële markten, zijn ook andere risicocomponenten belangrijk geworden. Een zeer belangrijke additionele risicocomponent is het marktrisico. Marktrisico wordt, zoals eerder vermeld, veroorzaakt door schommelingen op de financiële markten. Als meest eenvoudige voorbeeld kan men denken aan een aandeel.' Veronderstel dat de huidige prijs van het aandeel 100 Euro bedraagt. Het is mogelijk dat de verkoopprijs na enkele dagen hoger, dan wel lager is. De waardeverandering zorgt voor een mogelijke winst, dan wel een mogelijk verlies, en dus voor (markt)risico, als men tenminste waardeert tegen marktwaarde in plaats van boekwaarde. De waardering tegen marktwaarde is cruciaal in de hele opzet en volgt ook de dagelijkse praxis in met name de markten voor afgeleide instrumenten (derivaten). Voor derivaten wordt vaak gewerkt met dagelijkse vereffening. Dat wil zeggen dat de per dag gerealiseerde marktwaardeveranderingen van het verhandelde instrument direct worden verrekend, zie bijvoorbeeld Hull (1989). Beschouw bijvoorbeeld een termijncontract voor het bovengenoemde aandeel. Stel, de huidige waarde van dit termijncontract bedraagt 0. Indien morgen de prijs van het aandeel zodanig verandert dat de nieuwe waarde van het termijncontract negatief is, wordt deze waardeverandering aan het eind van de dag verrekend. Teneinde deze verrekening soepel te laten verlopen, wordt van de tegenpartijen die het contract hebben afgesloten, geëist dat zij een zogenaamde 'margin account' aanhouden. Wanneer het bedrag op deze margin account beneden een bepaalde drempelwaarde zakt, wordt een bijstorting geëist (margin call). Bij hevige fluctuaties van de onderliggende waarde (bijvoorbeeld de aandelenprijs) kan dit dus zorgen voor liquiditeitsproblemen, zie het geval van Metallgesellschaft. De praktijk van dagelijkse vereffening voor beursverhandelde

[1] Ik abstraheer hier van het onderscheid tussen systematisch en specifiek risico. Volgens sommigen is het marktrisico van de ingenomen positie in het aandeel alleen het systematische deel. Het niet-systematische deel wordt dan het kredietrisico van het aandeel genoemd.

derivaten noodzaakt financiële instellingen tot het voeren van een risicobeleid teneinde liquiditeits- (en eventueel solvabiliteits)problemen te voorkomen.

Niet alleen de financiële sector zelf, maar ook de toezichthouders zien het belang in van marktrisico en de beheersing daarvan. Zo worden tal van bankactiviteiten buiten de balans gehouden, waaronder ook de zogenaamde onderhandse (over-de-toonbank of OTC) producten. Dit zijn niet-beursverhandelde producten met vaak soortgelijke eigenschappen als beursverhandelde derivaten. Een bank kan bijvoorbeeld via contractuele verplichting een pensioenfonds het recht geven zijn aandelenportefeuille op een afgesproken datum aan de bank te verkopen voor een van te voren overeengekomen prijs (put-optie). Aangezien het slechts om een papieren transactie gaat, namelijk een contractuele verplichting, hoeft er niets te wijzigen op de balans van de bank (even de premie-inkomsten van de put-optie daargelaten). Het is echter duidelijk dat de aangegane verplichting consequenties kan hebben voor de liquiditeit en solvabiliteit van de betrokken bank. De bank loopt wel degelijk marktrisico, ook al komt dit niet tot uitdrukking op de balans en in de resultatenrekening tussen het tijdstip van het aangaan en het uitoefenen van het contract. Naast het marktrisico van onderhandse producten zijn banken natuurlijk ook onderhevig aan het marktrisico van beursgenoteerde producten. Toezichthouders moeten een goed inzicht hebben in de marktrisico's die worden gelopen door banken teneinde de stabiliteit van de financiële sector te garanderen.

Zoals vermeld hebben de toenemende volatiliteit op de financiële markten en de uitbreiding en standaardisatie van (soms moeilijk te doorgronden) financiële producten bijgedragen aan het toenemende belang van marktrisico voor zowel intern risicomanagement als voor het toezicht. Als één van de eerste stappen in het managen van dit marktrisico, is er behoefte aan een goede risicomaatstaf. Deze maatstaf moet de gebruiker ervan in staat stellen tijdig en adequaat risicovolle portefeuilles af te bouwen, dan wel in te dekken (hedgen). De ontwikkeling van een goede risicomaatstaf en de integratie daarvan in een risicomanagementsysteem werd bespoedigd door enkele debâcles met derivaten, zie Jorion (1995) en Srivastava (1998). Een en ander heeft geresulteerd in een amendement op het Bazelse accoord uit 1988. Dit amendement schrijft procedures voor om marktrisico's te kwantificeren en te rapporteren, ook voor niet-balansgenoteerde activiteiten, Bazel (1996b).

Het nu voorliggende artikel concentreert zich rond 1 risicomaatstaf, in het bijzonder de geriskeerde waarde. Teneinde voldoende aan te sluiten bij de internationale terminologie, kies ik er in dit artikel voor de term geriskeerde waarde te vervangen door zijn Engelstalige equivalent Value-at-Risk (VaR), zie Duffie en Pan (1997), Jorion (1997), of Dowd (1998) voor een overzicht, en Schachter (1999) voor een up-to-date lijst van literatuurverwijzingen. De in deze inleiding geschetste historische context van het VaR-concept maakt duidelijk dat we te maken hebben met een beperkte invalshoek van risicomanagement, met name toegespitst op een kwantitatieve aanpak van marktrisico. De uitgebreide aandacht voor 1 enkel risicoconcept in dit artikel kan worden verdedigd met de uitgebreide aandacht die VaR ontvangt in de financiële sector en in het toezicht. Het gebruik van VaR is reeds gemeengoed voor veel risicomanagementstaken binnen de financiële sector. Verder wordt aan de banken steeds vaker gevraagd VaR-achtige maatstaven regelmatig te rapporteren aan te toezichthouder om zo inzicht te verschaffen in het marktrisico van de ondernomen activiteiten. Ook financiële instellingen zelf zoeken meer en meer naar mogelijkheden om hun aandeelhouders te informeren in hun jaarverslagen omtrent het risico van hun (eventueel niet-balansgenoteerde) activiteiten. Gegeven het wijdverspreide gebruik van VaR, zou dit risicoconcept een potentiële kandidaat zijn voor opname in het jaarverslag.

Teneinde de uiteenzetting omtrent de noodzaak en de implementatie van VaR in het kader van risicomanagement goed te structureren, is het artikel als volgt opgezet. In Paragraaf 1 plaats ik VaR binnen het bredere kader van risicomaatstaven, zoals deze in de wetenschappelijke literatuur naar voren zijn geschoven. In Paragraaf 2 behandel ik enkele gangbare methoden om de VaR daadwerkelijk te bepalen voor een gegeven portefeuille van beleggingsobjecten. In Paragraaf 3 volg ik de omgekeerde benadering en bediscussieer ik het bepalen van portefeuilles met een optimaal verwacht rendement gegeven een restrictie op het toegestane risicoprofiel (VaR) van de portefeuille. In Paragraaf 4 sta ik stil bij het gebruik van VaR in het kader van toezicht. Hier noem ik ook enkele nog overgebleven mora1 hazard problemen bij het gebruik van VaR voor het toezicht, in het bijzonder met betrekking tot de interne-modellenaanpak zoals voorgesteld door het Bazels Comité, Bazel (1996a). In Paragraaf 5 bespreek ik enkele beperkingen en tekortkomingen van VaR als risicomaatstaf. In Paragraaf 6 trek ik enkele conclusies.

1. Maatstaven voor risico

Alvorens risico te kunnen managen, moet men eerst risico kunnen definiëren en eventueel meten of kwantificeren. Zoals blijkt uit experimenteel onderzoek is dit geen gemakkelijke taak, zie bijvoorbeeld Kahneman en Tversky (1979), Tversky en Kahneman (1992), Tversky en Wakker (1995), Prelec (1998) en de daarin genoemde literatuurverwijzingen. Als eerste oplossing is er in de financieel-economische literatuur dan ook voor gekozen een risicomaatstaf te hanteren die analytisch gemakkelijk hanteerbaar is, in het bijzonder de variantie, zie Markowitz (1952). Er zijn verscheidene argumenten aan te voeren voor het gebruik van de variantie als risicomaatstaf. Beschouw een portefeuille van beleggingsobjecten. Deze portefeuille resulteert in een verzameling mogelijke beleggingsopbrengsten. Indien we een kansstructuur opleggen aan deze verzameling van mogelijke opbrengsten, kunnen we de gemiddelde of verwachte beleggingsopbrengst berekenen, alsmede de variantie van de opbrengsten rond dit gemiddelde. Waar het gemiddelde een indicatie geeft van het niveau van de rendementen op de beleggingsportefeuille, geeft de variantie een indicatie van de onzekerheid betreffende het rendement. Grote varianties impliceren meer onzekerheid en daarmee, althans volgens Markowitz, meer risico. Er zijn twee omstandigheden waaronder het gebruik van de variantie als risicomaatstaf zonder meer correct is: (i) als de risicomanager een kwadratische nutsfunctie heeft, en (ii) als de beleggingsopbrengsten normaal zijn verdeeld.

Het is evident dat de variantie een analytisch gezien makkelijk hanteerbare grootheid is. De condities waaronder het een valide maatstaf is, zijn echter te stringent voor menige toepassing. Uit veel empirische studies blijkt bijvoorbeeld dat de veronderstelling van normaal verdeelde beleggingsopbrengsten niet houdbaar is, zie Pagan (1996) en Campbell, Lo, en MacKinlay (1997) met de daarin genoemde verwijzingen. De ongeschiktheid van de variantie als risicomaatstaf is ook duidelijk wanneer beleggingsobjecten kunnen worden gekozen met asymmetrische uitbetalingspatronen, bijvoorbeeld opties. In dat geval is het mogelijk voorbeelden te construeren waarin portefeuilles met opties efficiënter zijn dan portefeuilles zonder opties, in die zin dat de eerstgenoemde portefeuilles bij een zelfde verwachte opbrengst een lagere variantie hebben. Zie Leland (1996) en Lhabitant (1997). Deze voorbeelden gelden zelfs in het geval van efficiënte markten en "eerlijke"* prijzen voor de opties, hetgeen illustreert dat de variantie (in combinatie met de verwachting) een niet afdoende karakterisering geeft van de preferenties van beleggers, zie ook Dert en Oldenkamp (1997) en Lucas en Dert (1998).

Het grootste nadeel van de variantie als risicomaatstaf is dat afwijkingen boven het gemiddelde even zwaar worden meegenomen als afwijkingen beneden het gemiddelde. In andere worden, de variantie is een symmetrische maatstaf en daarmee eerder een maatstaf voor onzekerheid dan voor risico. Uit onderzoek blijkt namelijk dat beleggers risico meestal percipiëren als iets asymmetrisch, zie Kahneman en Tversky (1979) en Sortino en van der Meer (1991). Het negatieve nut dat wordt toegekend aan een verlies is veelal groter dan het positieve nut toegekend aan een (in absolute zin) even grote winst. Dit wordt geïllustreerd door de introductie en populariteit van beleggingsproducten met garantieregelingen, bijvoorbeeld klikfondsen. De belegger heeft dan het opwaarts potentieel van aandelenbeleggingen, zij het met een lager verwacht rendement. In tegenstelling tot een directe belegging in aandelen is de mogelijkheid van een *verlies* echter uitgesloten.

De sterke preferenties van beleggers voor veiligheid zijn al vroeg doorgedrongen in de literatuur. Zie bijvoorbeeld de aanpak van Roy (1952), Telser (1955) en Kataoka (1963). De populariteit van deze wijzen van aanpak bleef echter ver achter bij die van Markowitz (1952). Dit kan voor een groot deel verklaard worden uit het feit dat de aanpak van Markowitz, gebaseerd op varianties, analytisch veel makkelijker hanteerbaar is. Gegeven echter de bovenvermelde tekortkomingen van de variantie als risicomaatstaf is er een hernieuwde belangstelling ontstaan voor de eigenschappen van asymmetrische risicomaatstaven. Deze belangstelling werd verder gevoed door de beperkingen van de variantie als risicomaat voor ingewikkelder beleggingsproducten zoals derivaten.

Een klasse van risicomaatstaven die probeert de beperkingen van de variantie als maatstaf te verbeteren, werd geïntroduceerd door Fishbum (1977) and Bawa (1978). Definieer r als het rendement op een beleggingsobject of beleggingsportefeuille. De genoemde klasse van risicomaatstaven is dan gelijk aan

$$R(r^*,n) = E\left(\max(0,r^* - r)^n\right). \tag{1}$$

Hierbij is n de orde van de risicomaat en r^* een zogenaamd drempelrendement. De risicomaatstaf in (1) is de verwachting van de n-de macht van het maximum van 0 en het verschil tussen het drempel- en het gerealiseerde rendement. De keuze van het drempelrendement is zeer belangrijk. Wanneer het drempelrendement gelijk is aan nul, ziet de belegger met behulp van (1) alleen negatieve rendementen als risico. Positieve rendementen worden niet meegenomen in de risicomaatstaf. Maatstaf (1) wordt dan ook wel een ***neerwaarts***-risico-maatstafgenoemd. Het moge duidelijk zijn dat (1) een asymmetrische risicomaatstaf is. Merk verder op dat het drempelrendement in (1) zelf ook een kansvariabele mag zijn. Wanneer we r^* bijvoorbeeld gelijk nemen aan het rendement op de aandelenindex, kan (1) worden gebruikt om het risico te meten dat bijvoorbeeld een beleggingsfonds slechter presteert dan de markt als geheel. De graad n van de risicomaatstaf R geeft aan hoe zwaar de grootte van het

[2] Onder eerlijke prijzen versta ik hier de prijzen zoals die bepaald worden in een context van perfecte markten, d.w.z., er markten zijn efficiënt, er zijn geen mogelijkheden voor het realiseren van risicoloze overwinsten (no arbitrage), er zijn geen transactiekosten, enz. In dat geval is bijvoorbeeld de "eerlijke" prijs van een Europese optie gelijk aan de door de formule van Black en Scholes (1973) gegeven waarde.

verlies meetelt in de risicomaatstaf. Voor $n=0$ worden alle verliezen even zwaar gewogen, voor $n=1$ worden de verliezen lineair gewogen, enz. Als we $f(r)$ definiëren als de kansverdeling van r, kan (1) worden herschreven als

$$R(r^*,n) = \int_{-\infty}^{r^*} (r^* - r)^n f(r)dr. \tag{2}$$

De klasse in (1) bevat enkele welbekende risicomaatstaven, zoals VaR ($n=0$), verwacht verlies ($n=1$), en semi-variantie ($n=2$, zie Sortino en Price, 1994). Vooralsnog beperken we ons tot VaR. In de Paragrafen 3 en 5 zullen we kort terugkomen op $n=1$ en $n=2$ als alternatieve maatstaven voor neerwaarts risico.

Het is duidelijk dat de klasse van risicomaatstaven in (1) veel moeilijker analytisch is te hanteren dan de variantie. Desondanks hebben deze maatstaven in recente jaren enorm aan populariteit gewonnen. Dit is onder andere te danken aan de beschikbaarheid van toegankelijke softwarepakketten voor de berekening van VaR, bijvoorbeeld Riskmetrics™ (J.P. Morgan, 1998), alsook aan de incorporatie van neerwaarts-risicomaatstaven zoals VaR in het toezicht.

Voor $n=0$ kan (2) worden herschreven als

$$R(r^*,0) = \int_{-\infty}^{r^*} f(r)dr = P(r \leq r^*). \tag{3}$$

Zij $R(r^*,0)=p$, dan is $-r^*$ de VaR (als percentage van de geïnvesteerde waarde) horend bij een (1-p) betrouwbaarheidsniveau. Meer in het algemeen definiëren we VaR als volgt. Zij $B(t)$ de waarde van een portefeuille van beleggingsobjecten op tijdstip t. De VaR van de beleggingsportefeuille B behorend bij een betrouwbaarheidsniveau (1-p) wordt gegeven door de kleinste waarde van B^* waarvoor[3]

$$P(B(t+1) \leq B(t) - B^*) \leq p. \tag{4}$$

Merk op dat de meeteenheid van VaR gelijk is aan de munteenheid. Om precies te zijn is de VaR het minimale bedrag (in harde Euro's, dollars, enz.) dat men kan verliezen ten opzichte van de huidige portefeuillewaarde gegeven een gewenste betrouwbaarheid van (1-p). Dit wordt weergegeven in Figuur 1. In deze figuur is de (lognormale) kansverdeling van de beleggingsopbrengsten weergegeven voor een gemiddeld rendement van 10% en een standaard-deviatie van 15%. De uitgangspositie is $B(t)=1$. De verticale lijn in de figuur bevindt zich bij B^*, waarbij B^* correspondeert met $p\approx 5\%$. Beleggingsopbrengsten beneden B^* worden meegenomen in de risicomaatstaf, terwijl opbrengsten erboven niet worden meegenomen. De oppervlakte onder de kansdichtheid tussen 0 en B^* bedraagt 5%. De kans op een beleggingsuitkomst van tenminste ± 0.85 is dus $\pm 95\%$. Derhalve is de VaR gelijk aan de afstand tussen $B(t)$ en B^*.

<VOEG FIGUUR 1 HIER ONGEVEER TUSSEN>

[3] Sommige auteurs definiëren VaR liever in termen van het risico ten opzichte van een risicovrije belegging. In dat geval moet de definitie in (4) worden veranderd in $P(B(t+1) \leq e^{rf} B(t) - B^*) \leq p$, waarbij rf de risicovrije rente is. Zie Artzer et al. (1996). Voor beide definities zijn argumenten aan te voeren. In dit artikel volg ik de meest gebruikte definitie.

Alvorens verder te gaan, is het goed enkele kanttekeningen te plaatsen bij de definitie van VaR zoals gegeven in (4). Allereerst is VaR gelijk aan het *minimale* en niet het *maximale* verlies dat met kans p optreedt. Sommige risicomanagers dreigen de berekende VaR te zien als het ergste dat hen met kans p kan overkomen. Dit is onjuist. Als de beleggingsopbrengsten onafhankelijk zijn verdeeld over de verschillende dagen, impliceert (4) dat gemiddeld eens in de $(1-p)^{-1}$ dagen er een verlies wordt gerealiseerd van *tenminste* B^*. De VaR zegt verder niets over de grootte van dit verlies.

Een tweede kanttekening bij (4) betreft de periode waarover de wijziging in de waarde van de beleggingsportefeuille wordt berekend. (4) lijkt te suggereren dat het om de direct opvolgende periode gaat. De definitie in (4) staat echter toe om een VaR te berekenen over een bepaalde periode. Zo kan men een VaR berekenen op basis van een periode van bijvoorbeeld 1 dag, zoals vereist voor de dagelijkse rapportage van een bank aan de toezichthouder (Bazel, 1996b), of op basis van 10 dagen, zoals vereist door de toezichthouder in verband met het vaststellen van kapitaalvereisten, enz. Ook kan men VaR's uitrekenen over nog langere perioden, teneinde inzicht te verkrijgen in de strategische risico's van een portefeuille, zie bijvoorbeeld Muralidhar en Asad-Syed (1998).

Een derde punt betreft de bepaling van de VaR. Zoals blijkt uit (4) is de VaR niets anders dan een kwantiel van de verdeling van $B(t+l)-B(t)$. Om een betrouwbare schatting van de VaR te krijgen, zijn dus twee ingrediënten nodig: (i) een goede schatter voor het kwantiel van een verdeling; en (ii) een goede schatter voor de verdeling van beleggingsopbrengsten.

Dit brengt ons tot het vierde punt. Definitie (4) zegt als zodanig niets over de toegestane kansverdeling van beleggingsopbrengsten. We kunnen dus conditioneel op een geselecteerde portefeuille de VaR van die portefeuille bepalen. Daarentegen is het ook mogelijk conditioneel op een beleggingsbeleid een VaR te bepalen, of anders gezegd, het beleggingsbeleid te integreren in de bepaling van de VaR. Beide aanpakken komt men tegen in de literatuur. De eerste aanpak wordt het meest gebruikt. De laatste aanpak komt men tegen in bijvoorbeeld Luciano (1998) en Fusai en Luciano (1998).

Voorbeeld: Om het concept VaR enigszins te illustreren bezien we het volgende experiment. We beginnen met een bedrag van 10.000 Euro. Vervolgens wordt vijf maal een (eerlijke) munt opgeworpen. Voor iedere keer 'kop' wordt het bedrag verdubbeld, terwijl voor iedere keer 'munt' het bedrag wordt gehalveerd. De VaR horend bij een 95% betrouwbaarheidsniveau is nu gelijk aan 9687,5 Euro. De kans op 5 keer 'munt' is namelijk kleiner dan 5%, terwijl de kans op eender welke combinatie met minstens 1 keer 'kop' meer dan 5% is. De hoeveelheid geld die overblijft na 5 keer 'munt' is 312,5 Euro, zodat de VaR bij 95% betrouwbaarheid gelijk is aan 10.000-3 12,5=9687,5 Euro.

2. Kwantificeren van risico

In deze paragraaf houden we ons met name bezig met de kwantificering van de VaR. Zoals in de vorige paragraaf vermeld, hebben we daarvoor een goede schatter voor het kwantiel van een verdeling nodig, alsmede een goede schatter voor de verdeling van beleggingsopbrengsten. Beide onderwerpen worden in deze paragraaf behandeld. Teneinde de uiteenzetting te structureren, bekijken we VaR voor drie gevallen. Allereerst beschouwen we het eenvoudigste geval, dat van een belegging in 1 enkel aandeel. Vervolgens bezien we hoe de resultaten voor 1 aandeel kunnen worden gegeneraliseerd naar een portefeuille van aandelen. Als laatste bekijken we wat het effect is van de opname van derivaten in de portefeuille. De paragraaf wordt afgesloten met enkele opmerkingen over de berekening van VaR voor een planningshorizon van meer dan 1 periode.

2.1 VaR voor 1 aandeel

In deze paragraaf bekijken we de situatie waarin de beleggingsportefeuille bestaat uit 1 aandeel. We onderscheiden nu een parametrische, niet-parametrische en semi-parametrische aanpak van VaR. Elk van deze wijzen van aanpak maakt gebruik van historische gegevens. Voor de duidelijkheid is in Figuur 2 een tijdbalk weergegeven. Bij alle berekeningsmethoden voor VaR is het idee als volgt. Er moet vandaag een VaR berekend worden over de komende planningsperiode. Deze periode kan variëren van korter dan 1 dag tot langer dan 1 jaar. Om de VaR te berekenen wordt gebruik gemaakt van in het verleden gerealiseerde rendementen op het aandeel. Deze zijn waargenomen gedurende de gehele steekproefperiode. Het meest recente deel van de steekproefperiode wordt gebruikt om daarwerkelijk de VaR te bepalen, de zogenaamde schattingsperiode (window).

<VOEG FIGUUR 2 HIER ONGEVEER TUSSEN>

Over de benodigde lengte van de schattingsperiode is geen duidelijke consensus in de literatuur. Volgens de Bazelse richtlijnen, Bazel (1996b), moet de schattingsperiode minimaal 250 handelsdagen bevatten, hetgeen overeenkomt met ongeveer 1 jaar. Het voordeel van deze aanpak is dat enigszins rekening kan worden gehouden met tijdsvariatie in het proces dat de beleggingsopbrengsten genereert. Een nadeel is dat het aantal waarnemingen erg beperkt is, zeker gezien het schattingsprobleem. De moeilijkheid is namelijk dat we zijn geïnteresseerd in een gebeurtenis die met zeer kleine kans voorkomt: het minimale verlies bij een kans van 1% of 5%. Dit houdt in dat we op 250 waarnemingen gemiddeld slechts 2 tot 3 waarnemingen hebben om de 1% VaR te identificeren, en 12 tot 13 om de 5% VaR te schatten. Teneinde de betrouwbaarheid van de VaR schattingen te vergroten, kan men het aantal waarnemingen binnen de steekproefperiode vergroten. Dit wordt bijvoorbeeld voorgesteld door Danielsson en de Vries (1997a,b). Zij beargumenteren dat de echte risico's waarin men is geïnteresseerd zich slechts sporadisch voordoen. Dit houdt in dat een steekproef meerdere jaren moet beslaan om een goed beeld te geven van de relevante risico's.

Gegeven een keuze voor de lengte van de steekproefperiode moet een keuze gemaakt worden voor de wijze van schatten van de verdeling van beleggingsopbrengsten.

Niet-parametrische schattingsmethoden
Als minst restrictieve schattingsmethode geldt de niet-parametrische. Deze komt voor in verschillende vormen. Een daarvan is de methode van historische simulatie. We definiëren $r(t,T)$ voor $t=1,\ldots,T$, als de in de steekproef gerealiseerde rendementen op het aandeel, waarbij T het aantal waarnemingen in de steekproefperiode aanduidt. Vervolgens construeren we, uitgaande van de huidige waarde van het aandeel B(t), mogelijke toekomstige aandelenprijzen $B(t+1,T)=B(t)*(1+r(t,T))$. De waarden van $B(t+1,T)$ worden geordend van laag naar hoog, en vervolgens wordt de $T/100^e$ geordende waarneming genomen als de schatting voor de 1% VaR, de $T/20^e$ waarneming voor de 5% VaR, enz. Een mogelijke variatie op de historische methode is

de Bootstrap methode. Hierbij trekt men willekeurig (met teruglegging) 1 van de in de steekproefperiode gerealiseerde rendementen. Vervolgens construeert men de corresponderende toekomstige aandelenprijs uitgaande van de huidige waarde van het aandeel. Dit procédé herhaalt men een groot aantal keer. De gebootstrapte toekomstige aandelenprijzen kan men weer ordenen en gebruiken voor de bepaling van de VaR. Het is natuurlijk mogelijk om bij het trekken uit de gerealiseerde rendementen verschillende kansen toe te kennen aan verschillende rendementen, bijvoorbeeld relatief meer kans op de in het recente verleden gerealiseerde rendementen. Een nog verdergaande verfijning van de historische simulatiemethode is mogelijk met behulp van kernschatters, zie Butler en Schachter (1998). Deze methode kan worden gekarakteriseerd als een uitgesmeerde (smoothed) bootstrap. De methode werkt als volgt. Als eerste wordt een gewone bootstrap-trekking gedaan uit de historische rendementen. Vervolgens wordt een trekking gedaan uit een normale verdeling[4] met gemiddelde nul en een kleine variantie h_T. Deze variantie of bandbreedteparameter is een afnemende functie van de steekproefomvang T. De trekking volgens de uitgesmeerde bootstrap is nu gelijk aan de trekking uit de gewone bootstrap plus de trekking uit de onafhankelijke normale.

Het grote voordeel van de niet-parametrische aanpak is dat er zeer weinig veronderstellingen worden gemaakt. De procedure levert een consistente schatting van de echte verdeling wanneer de omvang van de steekproef T divergeert naar oneindig. Voor deze consistentie zijn natuurlijk wel enige regulariteitsvoorwaarden van belang. Allereerst dient de steekproef homogeen te zijn. Indien er tijdsvariatie zit in het data-genererend-proces van de aandelenrendementen, kan het zijn dat historische rendementen weinig zeggen over toekomstige rendementen. Het is bijvoorbeeld onmogelijk met behulp van de niet-parametrische methode inzicht te verkrijgen in effecten van de invoering van de Euro op aandelenprijzen als zich in het verleden niet soortgelijke structurele veranderingen hebben voorgedaan. Naast structurele veranderingen kan ook gedacht worden aan andere vormen van tijdsvariatie. De belangrijkste daarvan is het optreden van clusters van volatiliteit. In financiële markten vindt men dat in de regel onrustige perioden gevolgd worden door onrustige perioden, terwijl rustige perioden gevolgd worden door rustige perioden, zie Pagan (1996) en Campbell, Lo, en MacKinlay (1997). Dit vergt een lagere weging van meer in het verleden gerealiseerde rendementen ten opzichte van de meer recente rendementen voor de bepaling van de VaR. Dergelijke correcties worden ook wel toegepast in de VaR literatuur, met name binnen de klasse van parametrische modellen, zie bijvoorbeeld Ahlstedt (1997), Billio en Pelizzon (1997), Christiansen (1998) en J.P. Morgan (1999a). Ingeval van het voorkomen van clusters van volatiliteit moet de gewone bootstrap-procedure worden vervangen door een blok-bootstrap-procedure. Een tweede beperking van de niet-parametrische methode is de betrouwbaarheid van de resulterende VaR schattingen. Jorion (1996) beargumenteert bijvoorbeeld dat de betrouwbaarheid van VaR schattingen verkregen met (mogelijk incorrecte) parametrische modellen groter is dan de VaR verkregen met de niet-parametrische aanpak. Een soortgelijke claim wordt gemaakt door Danielsson en de Vries (1997a,b), maar dan ten faveure van de semi-nietparametrische methode.

Semi-nietparametrische schattingsmethoden

De semi-nietparametrische methode van Danielsson en de Vries (1997a,b) combineert de parametrische aanpak met de niet-parametrische. De motivatie van hun aanpak is tweeledig. Allereerst merken ze op dat rendementen vaak dikstaartig verdeeld zijn. Dit houdt in dat de kans op extreme gebeurtenissen (zoals het ineenzakken van de beurs) veel te klein is wanneer de

[4] Andere verdelingen zijn eveneens toegestaan, mits aan bepaalde regulariteitseisen is voldaan. Zie bijvoorbeeld Silverman (1986).

normale verdeling wordt gebruikt voor aandelenrendementen. De kans dat een trekking uit een normale verdeling groter is dan een zekere constante c daalt namelijk exponentieel naar nul voor grote c. Uit veel empirisch werk blijkt dat een algebraïsche daling naar nul veel plausibeler is, zie Pagan (1996) en Campbell, Lo, en MacKinlay (1997). Danielsson en de Vries proberen de dikstaartigheid van aandelenrendementen te beschrijven met behulp van een parametrisch model. Een tweede motivatie voor hun aanpak ligt in de al eerder gesignaleerde instabiliteit van VaR schattingen die zijn verkregen met de volledig niet-parametrische methode. Door het inbouwen van parametrische elementen in hun aanpak reduceren Danielsson en de Vries deze instabiliteit aanzienlijk, met name wanneer het gaat om gebeurtenissen met extreem kleine kansen (bijvoorbeeld 0.1%). Zulke kleine kansen kunnen hun nut hebben voor stress-toetsen, i.e., toetsen voor de gevoeligheid van de beleggingsuitkomsten voor extreme prijsschommelingen.

De semi-nietparametrische aanpak werkt ruwweg als volgt. Allereerst wordt een normale bootstrap-trekking gedaan uit de historische rendementen. Wanneer het getrokken rendement niet behoort tot de extremen van de historische rendementen, wordt de bootstrap-trekking behouden. Anders wordt deze trekking vervangen door een trekking uit een parametrische, dikstaartige verdeling. Danielsson en de Vries gebruiken een getransleerde Pareto-verdeling voor dit doel. De translatie is zodanig dat een trekking resulteert die zich bevindt in het bovenste dan wel onderste kwantiel van de historische rendementen. Voor het centrale gedeelte van de rendementsverdeling wordt dus de bootstrap gebruikt, terwijl voor de staarten de Pareto-verdeling wordt gebruikt. Met behulp van het gesimuleerde rendement wordt een gesimuleerde toekomstige aandelenprijs op de gebruikelijke wijze geconstrueerd. Dit proces wordt vele malen herhaald. Met behulp van de resulterende trekkingen kan dan de VaR worden geschat. Uit simulaties in Danielsson en de Vries blijkt dat deze manier van aanpak leidt tot stabielere schattingen van de VaR, met name voor zeer lage waarden van p in (4). Zie ook Diebold, Schuermann en Stroughair (1998).

De semi-nietparametrische aanpak vergt enkele cruciale stappen. Allereerst moet bepaald worden bij welke kwantielen precies de overgang plaatsvindt van de niet-parametrische naar de parametrische simulatie-aanpak. Ten tweede moeten de parameters van de parametrische verdeling worden geschat. Voor wat betreft het eerste stellen Danielsson en de Vries een op de bootstrap geënte schattingsmethode voor ter bepaling van de precieze kwantielen. Deze methode maakt gebruik van een tweede-orde-benadering van het staartgedrag van de verdeling voor aandelenrendementen. Gegeven een keuze voor de precieze kwantielen, wordt de voor de Pareto-verdeling benodigde parameter geschat met de Hill-schatter, zie Hill (1975).

Net zoals de niet-parametrische methode maakt ook de semi-nietparametrische methode zeer weinig veronderstellingen omtrent het gedrag van de aandelenrendementen. Natuurlijk zijn dezelfde beperkingen van toepassing als bij de niet-parametrische aanpak. De modellering van het staartgedrag van de verdeling met behulp van de Pareto-verdeling is niet erg restrictief. Ook de bepaling van de parameter van de Pareto-verdeling met behulp van de Hill-schatter geeft consistente resultaten onder zeer algemene voorwaarden.

Het belangrijkste nadeel van de semi-nietparametrische aanpak is de generalisatie naar de context met meerdere aandelen en/of derivaten. Zie Boorsma (1998) en Straetmans (1998) en de discussie in Paragraaf 2.3.

Parametrische schattingsmethoden

Tenslotte bespreken we enkele parametrische schattingsmethoden voor VaR. Bij de parametrische aanpak postuleert men een specifieke klasse van verdelingen voor de beschrijving van de aandelenrendementen. Zij $F(\cdot;b)$ de verdelingsfunctie van beleggingsopbrengten, afhangend van de parametervector b. De waarde van b kan nu worden geschat op basis van de historische rendementen uit de steekproefperiode en de specifieke parametrische vorm van $F(\cdot)$. Dit kan met bijvoorbeeld de methode van maximale aannemelijkheid. De VaR wordt vervolgens gegeven door VaR=$F^{-1}(p;b)\cdot B(t)$, met $F^{-1}(\cdot;b)$ de inverse cumulatieve verdelingsfunctie. De meest gebruikte verdeling is de normale of log-normale verdeling. Voor bijvoorbeeld de normale verdeling berekenen we het gemiddelde (m) en de variantie (s^2) van de rendementen uit de schattingsperiode. Deze twee kengetallen worden vervolgens ingevuld in de normale verdeling. De 1-periode VaR wordt nu gegeven door

$$VaR = -B(t)\cdot(m + s\cdot\Phi^{-1}(p)), \tag{5}$$

waarbij $\Phi^{-1}(\cdot)$ de inverse cumulatieve verdelingsfunctie is van de standaard-normale verdeling. Het is duidelijk dat wanneer de beleggingsportefeuille uit slechts 1 aandeel bestaat, de uitdrukking van de VaR analytisch kan worden gevonden. Wel moet (eventueel numeriek) de verdelingsfunctie kunnen worden geïnverteerd.

Het belangrijkste voordeel van de parametrische aanpak is de snelheid van de berekeningsmethode en de efficiëntie van de resulterende VaR-schatting indien de parametrische verdeling correct is. Verder is het mogelijk de parametrische modellen uit te breiden teneinde empirisch-relevante fenomenen te beschrijven, zoals clusters van volatiliteit. Voorbeelden hiervan zijn parametrische ARCH en GARCH modellen, zie bijvoorbeeld Christiansen (1998). Het belangrijkste nadeel van de parametrische aanpak daarentegen is de mogelijkheid van misspecificatie. We spreken van misspecificatie wanneer de gekozen parametrische vorm van de verdeling niet overeenkomt met de werkelijke verdeling. Zo kan men bijvoorbeeld de VaR berekenen op grond van de normale verdeling, terwijl de aandelenrendementen niet dunstaartig maar dikstaartig zijn verdeeld. Ook zou het kunnen zijn dat aandelenrendementen scheef verdeeld zijn: er zijn meer grote negatieve uitschieters dan positieve. Het effect van misspecificatie op de VaR hangt sterk af van de specifieke veronderstellingen die men maakt. Lucas en Klaassen (1998) laten bijvoorbeeld zien dat zowel een onderschatting als een overschatting van VaR tot de mogelijkheden behoort indien men misspecificatie van de verdeling toestaat. Een belangrijk conclusie is dat de gevolgen van misspecificatie aanzienlijk kunnen zijn. Zie ook Stahl (1997) voor de relatie tussen misspecificatie een kapitaalvereisten.

In plaats van een analytische uitdrukking te hanteren voor de VaR, zouden we ook een simulatie-aanpak kunnen volgen zoals in het geval van de niet-parametrische en semi-parametrische aanpak. De verdeling $F(\cdot)$ kan dan gebruikt worden om trekkingen te verkrijgen van de aandelenrendementen. Een voldoende groot aantal trekkingen kan vervolgens weer dienen voor de bepaling van de VaR. Hoewel in het uiteengezette univariate geval een dergelijke simulatie-aanpak niet nodig is, zijn er tal van andere situaties denkbaar waarin de simulatie-aanpak de enige mogelijkheid is om de VaR te berekenen.

2.2 VaR voor een portefeuille van aandelen

De stap van 1 aandeel naar een portefeuille van aandelen is niet al te gecompliceerd. Het grootste probleem is dat in veel gevallen een analytische aanpak niet langer haalbaar is. Dit probleem kan worden opgevangen door een simulatie-aanpak te hanteren. We beschouwen een portefeuille bestaande uit n aandelen. De waarde van de portefeuille nu bedraagt B(t). Het aantal aandelen van bedrijf i is gelijk aan y_i, terwijl de prijs van aandeel i nu gelijk is aan Pi(t). Er geldt dus dat

$$B(t) = y_1 \cdot P_1(t) + \ldots + y_n \cdot P_n(t). \tag{6}$$

Indien $r_i(t)$ het rendement bedraagt op aandeel i, is het rendement op de portefeuille (r(t)) dus gelijk aan

$$r(t) = x_1 \cdot r_1(t) + \ldots + x_n \cdot r_n(t), \tag{7}$$

waarbij x_i de fractie is van het vermogen dat is belegd in aandeel i. De VaR voor een gegeven portefeuille van aandelen kan dus makkelijk worden berekend door met behulp van (7) de portefeuillerendementen te construeren uit de historische rendementen op de individuele aandelen. Op die manier is het probleem gereduceerd tot de bepaling van een univariate VaR.

Er is echter een probleem wanneer men de parametrische aanpak wil volgen. Indien men een parametrische verdelingsveronderstelling maakt voor de vector van beleggingsrendementen, is het niet altijd mogelijk eenvoudig de verdeling af te leiden van de univariate projectie van deze vector zoals gegeven in (7). Wanneer de rendementen op de individuele aandelen bijvoorbeeld lognormaal verdeeld zijn, is het niet mogelijk een makkelijk hanteerbare uitdrukking te vinden voor de verdeling van het portefeuillerendement (7). Er zijn twee mogelijke oplossingen voor dit probleem. Allereerst kan men een andere parametrische verdeling schatten voor iedere portefeuille die men in beschouwing neemt. Dit is conceptueel de minst bevredigende oplossing. Een alternatief is het simuleren van vectoren van individuele rendementen. Deze kunnen worden gegenereerd uit de multivariate parametrische verdeling. Vervolgens kan de projectie in (7) worden gebruikt om de univariate beleggingsrendementen te vertalen naar de portefeuillerendementen. Het belangrijkste nadeel van de laatste methode is dat deze nogal veeleisend van de historische gegevens kan zijn. Stel bijvoorbeeld dat we bereid zijn de multivariate normale verdeling te veronderstellen voor de vector van aandelenrendementen. Deze verdeling wordt gekarakteriseerd door een n-dimensionale vector van gemiddelden m en een n bij n covariantiematrix S. Voor zeer grote waarden van n, i.e., voor portefeuilles van grote omvang, kan dit voor problemen zorgen. Indien de schattingsperiode niet al te veel waarnemingen bevat, zullen de elementen van m en S onbetrouwbaar worden geschat. Wanneer het aantal waarnemingen in de schattingsperiode (T) kleiner is dan het aantal aandelen (n), is de maximale-aannemelijkheidsschatting van S zelfs singulier. Deze moeilijkheden zijn inherent aan het probleem en de beschikbare hoeveelheid gegevens. De problemen kunnen alleen opgelost worden door restricties op te leggen aan de covariantiematrix S. Dit kan door de aandelenrendementen te modelleren met behulp van evenwichtsmodellen zoals het Capita1 Asset Pricing Model, of met behulp van andere factormodellen, zie Jorion (1997). De problemen worden alleen maar erger als nog complexere multivariate verdelingen worden gebruikt dan de multivariate normale verdeling.

De bovenstaande aanpak van VaR voor portefeuilles van aandelen is de meest directe. Soms is men echter in meer geïnteresseerd dan alleen de VaR van de portefeuille. Bijvoorbeeld ingeval de VaR als te hoog wordt beoordeeld, wil men graag weten welke aandelen uit de portefeuille moeten worden gehaald om met minimale transactiekosten de VaR terug te brengen naar een acceptabel niveau, zie ook Paragraaf 3. Een hulpzaam begrip hierbij is de marginale (incremental) VaR. De marginale VaR van een beleggingsobject voor een gegeven portefeuille is de toename in de VaR van die portefeuille wanneer het beleggingsobject aan de portefeuille wordt toegevoegd. De marginale VaR van een aandeel voor een bepaalde portefeuille kan als volgt worden berekend. Allereerst bepaalt men de VaR voor de portefeuille inclusief het betreffende aandeel. Vervolgens berekent men de VaR van de portefeuille exclusief dat aandeel. De marginale VaR is het verschil tussen de twee berekende VaR's. Daarmee is de bepaling van marginale VaR weliswaar rekenintensiever dan de bepaling van de gewone VaR, maar conceptueel niet ingewikkelder.

2.3 VaR voor niet-lineaire portefeuilles

VaR voor derivaten is een belangrijk onderwerp. Een van de redenen voor de opkomst van VaR is dat VaR een manager in staat stelt het risico van een gecompliceerd beleggingsproduct samen te vatten in 1 enkel getal. Natuurlijk kleven er bezwaren aan het samenvatten van een ingewikkeld product in slechts 1 getal. Toch zal de rapportage van de VaR vaak enig inzicht verschaffen in het risicogehalte van het betreffende, mogelijk intransparante product. De noodzaak voor dit soort informatieverschaffing blijkt wel uit enkele catastrofes met derivaten, zie bijvoorbeeld Srivastava (1998).

De bepaling van VaR kan een stuk ingewikkelder worden wanneer er derivaten of andere afgeleide instrumenten in het spel zijn. We zullen de belangrijkste problemen schetsen op een tamelijk hoog abstractieniveau, zonder verder in te gaan op de specifieke structuur van de derivaten. Dit vergt enige wiskundige achtergrond van de lezer. Indien gewenst kan de huidige paragraaf worden overgeslagen zonder dat dat moeilijkheden oplevert voor het vervolg van dit artikel.

Een derivaat wordt gekarakteriseerd door de prijs van 1 of meerdere onderliggende waarden gedurende een bepaalde tijdsperiode. Ik beperk me in dit artikel tot het geval van aandelen. We definiëren $F_t(\cdot)$ als de verdeling op tijdstip t van de n verschillende relevante aandelenprijzen gedurende de periode $[t,T]$. Het derivaat is nu een functionaal die $F_t(\cdot)$ projecteert op de reële rechte,

$$D_j = g_j(F_t), \tag{8}$$

waarbij j de index is van het derivaat, $D=(D_1,\ldots,D_m)$ de vector van derivaten, m het aantal derivaten en $g(F_t)=(g_1(F_t),\ldots,g_m(F_t))$ de functionaal die de verdeling van onderliggende waarden over de relevante periode projecteert op de vector van derivatenprijzen. Voor sommige eenvoudige derivaten is de functionaal $g(F_t)$ expliciet bekend, bijvoorbeeld Europese opties. Voor andere derivaten moet de functionaal $g(F_t)$ numeriek worden bepaald. In sommige gevallen kan de bepaling van $g(F_t)$ zeer rekenintensief zijn. Dit dient men in het achterhoofd te houden bij de navolgende discussie.

We krijgen meer inzicht in de idee achter (8) als we het voorbeeld van Europese opties bekijken. Stel we hebben een portefeuille die bestaat uit $m=2$ put-opties op twee onderliggende aandelen.

De put-opties zijn in alles gelijk, behalve wat betreft de onderliggende waarde. Voor het gemak veronderstellen we dat aan de condities van Black en Scholes (1973) is voldaan, zodat een prijs kan worden toegekend aan de opties volgens de door hen ontwikkelde formule. De functionaal in (8) kan nu worden vervangen door een functie,

$$\begin{cases} D_1 = g_1\,(S_1\,(t+1)), \\ D_2 = g_2\,(S_2\,(t+1)), \end{cases} \tag{9}$$

waarbij $g_1(\cdot)$ en $g_2(\cdot)$ de relevante versies van de Black-Scholes formule zijn. Het is duidelijk dat voor de berekening van de VaR een bivariaat stochastisch proces van belang is, namelijk $(S_1(t+1),S_2(t+1))$. De elementen uit deze stochastische vector zijn onderling gecorreleerd. Gezien het feit dat (9) een niet-lineaire transformatie is van het onderliggende bivariate proces, is er geen mogelijkheid eenvoudig de verdeling van een simpele lineaire combinatie van D_1 en D_2 af te leiden uit die van $(S_1(t+1),S_2(t+1))$. Voor ingewikkelder opties wordt de afhankelijkheid in (9) ook ingewikkelder. Voor bijvoorbeeld Aziatische opties hangt de waarde van het derivaat niet alleen af van de waarde van de onderliggende aandelen op tijdstip $t+1$, maar van de waardeontwikkeling van de aandelen gedurende de hele periode.

Wanneer we een simulatie-aanpak volgen, zijn er in principe geen conceptuele problemen. Met behulp van de niet-parametrische of de parametrische aanpak doen we een trekking uit de verdeling $F_t(\cdot)$. Dit geeft een ontwikkeling van de aandelenprijzen over de relevante periode. Gegeven deze ontwikkeling, kunnen we de waarde van het derivaat in de volgende periode bepalen, alsmede de op tijdstip $t+1$ geldende verdeling van de aandelenprijzen voor de periode $[t+1,T]$. Deze nieuwe verdeling, die we noteren als $F_{t+1}(\cdot)$, beelden we via de functie $g(\cdot)$ af op de vectoren van derivatenprijzen op tijdstip $t+1$, en daarmee op waarde van de beleggingsportefeuille op tijdstip $t+1$. Dit simulatieproces wordt een groot aantal malen herhaald. De VaR kan nu op de standaardmanier worden berekend op grond van de simulaties. Het is duidelijk dat dit een zeer rekenintensieve aanpak is, met name wanneer de functie $g(\cdot)$ niet expliciet gegeven is, maar ook zelf moet worden bepaald met behulp van simulatie. Ondanks deze implementatiemoeilijkheden is er niet een direct alternatief voor de bepaling van VaR voor portefeuilles met derivaten. Het is conceptueel niet juist om bijvoorbeeld de normale of log-normale verdeling te gebruiken als benadering voor de in het verleden gerealiseerde rendementen op de optieportefeuille. Verder is het mogelijk dat voor bepaalde derivaten geen historische prijsgegevens beschikbaar zijn. Dit geldt met name voor maatwerkproducten zoals specifieke onderhandse derivaten.

Het is mogelijk de bovenstaande berekeningen enigszins te versimpelen met behulp van Taylor-expansies van de functionaal $g(\cdot)$. De eerder beschreven methode voor de bepaling van VaR heet de methode van volledige herwaardering. In sommige gevallen is het mogelijk een 1^e dan wel 2" orde expansie van $g(\cdot)$ te nemen rond de huidige aandelenprijzen. Deze wijzen van aanpak staan respectievelijk bekend als de Delta en de Delta-Gamma methoden. Deze termen zijn afkomstig uit de financieel-economische theorie over het dynamisch repliceren van derivaten, zie bijvoorbeeld Hull (1989). Wanneer de genoemde expansie wordt gesubstitueerd voor de functionaal $g(\cdot)$ wordt de vector van derivatenprijzen een lineaire of kwadratische functie van de aandelenprijzen tussen t en T.

Een totaal andere aanpak wordt gevolgd door Studer en Liithi (1997). Zij berekenen een schatting van VaR met behulp van niet-lineaire programmeringstechnieken. Allereerst definiëren ze een gebied S zodanig dat S $100(1-p)$ procent van de kansmassa van $F_t(\cdot)$ bevat. Vervolgens wordt middels optimalisatie bepaald wat het maximale verlies is van de derivatenportefeuille wanneer de mogelijke realisaties van aandelenprijzen worden gerestricteerd tot de verzameling S. Merk op dat dit een conservatieve schatting oplevert van de VaR. De VaR is namelijk gelijk aan het infimum van de door Studer en Liithi (1997) voorgestelde waarde over alle mogelijke verzamelingen S die aan het genoemde criterium voldoen. Uit simulaties en empirie in Boorsma (1998) blijkt dat de methode van Studer en Lüthi dermate conservatieve resultaten oplevert indien de derivatenportefeuille afhangt van een groot aantal aandelenprijzen, dat de praktische relevantie van de methode vooralsnog in twijfel kan worden getrokken.

Tot slot rest nog 1 algemene opmerking in verband met de bepaling van VaR voor portefeuilles met derivaten. De functionaal $g(F_t)$ in (8) volgt uit de financieel-economische theorie. Deze theorie is echter ook slechts een abstractie van de werkelijkheid. Het is dus mogelijk dat bepaalde cruciale componenten van de prijsvorming zijn gemist. Dit kan grote consequenties hebben voor de validiteit van de berekende VaR. De gevaren van misspecificatie van de functionaal $g(F_t)$ worden groter naarmate het product gecompliceerder wordt. De precieze gevolgen hiervan in empirisch relevante situaties zijn nog niet duidelijk in kaart gebracht in de wetenschappelijke literatuur.

2.4 VaR over langere perioden

We sluiten de bespreking van de berekening van VaR voor een gegeven portefeuille af met enkele opmerkingen over de berekening van de VaR voor een planningshorizon die meerdere perioden beslaat. Voor bijvoorbeeld de VaR over een 10-daagse periode, zoals vereist in Bazel (1996a,b), kunnen twee wijzen van aanpak worden gevolgd. Allereerst kan men uit de historische gegegevens een groot aantal 10-daagse rendementen op de beleggingsporttefeuille construeren. Wanneer bijvoorbeeld dagdata beschikbaar zijn, houdt dit in dat de historische gegevens moeten worden geaggregeerd over de tijd. Het grootste nadeel van deze eerste manier van aanpak is dat het aantal beschikbare historische gegevens drastisch kan afnemen als de lengte van de VaR-periode toeneemt. De tweede manier past de stap van tijdsaggregatie niet toe op de schattingsperiode, maar op de VaR-planningsperiode. Gegeven bijvoorbeeld een model voor 1-dagsrendementen, wordt een VaR berekend op 10-dagsbasis.

Een model voor hoogfrequente gegevens kan op tenminste twee manieren worden gebruikt om een VaR op laagfrequente basis te construeren. Allereerst kan men met behulp van het hoogfrequente model (bijvoorbeeld op dagbasis), meer-perioden-voorspellingen doen. In sommige gevallen kunnen de voorspellingen en hun bijbehorende verdelingen analytisch worden afgeleid, bijvoorbeeld in het geval van een lineair model met normale storingen. Vaak zullen de voorspellingen en hun verdelingen echter numeriek en met behulp van simulatietechnieken moeten worden bepaald. Hoewel dit conceptueel geen problemen oplevert, kan het berekenen van meer-perioden-voorspellingen op deze wijze een nogal rekenintensieve aangelegenheid worden.

Een tweede manier om hoogfrequente gegevens en modellen te gebruiken voor de berekening van een laagfrequente VaR is de zogenaamde variantie-covariantie-aanpak, zie Bazel (1996b). Deze aanpak wordt officieel toegestaan door toezichthouders voor de VaR-rapportage van banken. Het idee van de aanpak is eenvoudig. Wanneer de VaR op 1-dagsbasis wordt gegeven door $m+s\cdot c$ voor een zekere constante c, dan mag de VaR op k-dagsbasis worden berekend als

$m+k^{1/2}\cdot s\cdot c$. Deze berekeningswijze, die bekend staat onder de naam wortel-k methode, is correct in het geval van lineaire modellen met normaal verdeelde storingen. In nagenoeg ieder ander geval leidt de berekeningswijze, hoewel snel en eenvoudig, tot incorrecte resultaten. De mate van onjuistheid en de gevolgen ervan voor de berekende VaR zijn niet eenduidig vast te stellen. We bespreken daarom twee voorbeelden: het effect van dikstaartigheid en het effect van clusters van volatiliteit. Beide effecten zijn empirisch relevant in de financieel-economische context.

Danielsson en de Vries (1997a,b) en Danielsson, Hartmann en de Vries (1998) beargumenteren dat de wortel-k methode leidt tot conservatieve schattingen van de VaR. Volgens deze auteurs zou de wortel-k methode moeten worden vervangen door de M^e-machtswortel-k methode, waarbij M het aantal bestaande momenten van de rendementsverdeling is. Bijvoorbeeld voor een Student t verdeling met v vrijheidsgraden, is M gelijk aan v. Er lijkt in de literatuur enige consensus te zijn omtrent het bestaan van het 2^e moment van financiële data, zie Pagan (1996). Dit houdt in dat $M \geq 2$, zodat de M^e-machtswortel-k methode leidt tot een minder conservatieve schatting van de VaR dan de wortel-k methode. Een duidelijk manco van de door Danielsson en de Vries voorgestelde procedure van tijdsaggregatie is inconsistentie van de de M^e-machtswortel-k aanpak in het geval van normale innovaties. Zoals al eerder opgemerkt, is de wortel-k aanpak de enige juiste voor lineaire modellen met normaal verdeelde storingen. Voor de normale verdeling geldt echter ook dat alle momenten bestaan, hetgeen impliceert dat $M=\infty$. Bijgevolg levert de procedure van Danielsson en de Vries, tenminste theoretisch gezien, in dat geval dezelfde VaR voor een 1-dagsperiode en een k-dagsperiode. De k-dags-VaR is in dat geval te klein. Soortgelijke effecten treden op wanneer de verdeling niet normaal is, maar het aantal bestaande momenten M voldoende groot.

De nadelen van de wortel-k methode ingeval van clusters van volatiliteit zijn goed beschreven door
Christoffersen, Diebold en Schuermann (1998). Wanneer perioden van hoge en lage volatiliteit zich in clusters voordoen, is het mogelijk deze regelmatigheden in de gegevens te modelleren. Hiervoor kan men bijvoorbeeld de klasse van gegeneraliseerde autoregressieve conditionele heteroskedasticiteits-modellen (GARCH) gebruiken. De belangrijkste eigenschap van GARCH-modellen in de huidige context is dat zij de variantie van de beleggingsopbrengsten tussen nu en het volgende tijdstip relateren aan verleden varianties en beleggingsopbrengsten. Op deze manier kan de persistentie in het optreden van perioden van hoge en lage volatiliteit op een gemakkelijke manier worden gemodelleerd. Het voordeel van de modellen met een tijdsvariërende variantie is dat het risico met het daarbij behorende kapitaalbeslag (Bazel, 1996b) varieert over de tijd: in rustige perioden hoeft minder kapitaal aangehouden te worden voor de opvang van calamiteiten dan in onrustige perioden. Wanneer echter de wortel-k methode wordt gehanteerd om de VaR op bijvoorbeeld 1-dagsbasis te transformeren naar een VaR op k-dagsbasis, is duidelijk dat de tijdsvariatie in de varianties wordt opgeblazen met een factor $k^{1/2}$. De VaR over meerdere perioden varieert derhalve heftiger over de tijd dan de VaR over 1 periode. Christoffersen et al. (1998) tonen formeel aan dat de VaR voor een periode van meerdere dagen juist minder moet variëren dan de 1-dags VaR voor GARCH processen.

Christoffersen en Diebold (1997) bestuderen verder de bruikbaarheid van modellen voor tijdsvariërende volatiliteit voor risicomanagement. Zij concluderen dat voor typische financiële data de voorspelbaarheid van volatiliteit zeer beperkt is. De volatiliteit in de nabije toekomst kan nog met enige precisie worden voorspeld, maar de volatiliteit over een langere periode is uiterst moeilijk te voorspellen. De auteurs stellen dan ook voor om wat betreft de VaR over langere perioden meer te vertrouwen op de onconditionele verdeling van beleggingsopbrengsten, dat wil zeggen, om niet direct rekening te houden met het voorkomen van clusters van volatiliteit.

Het is duidelijk dat het gebruik van de wortel-k methode kan leiden tot zowel een onderschatting als een overschatten van de VaR. De enige juiste aanpak voor niet-lineaire modellen en/of niet normaal verdeelde storingen lijkt dan ook het construeren van meerstaps-voorspellingen. Dit levert een rekenintensievere aanpak op dan de wortel-k methode, maar de resultaten zijn tenminste consistent en theoretisch verantwoord.

3. Gebruik van VaR voor de bepaling van efficiënte beleggingsallocaties

Tot nu toe hebben we ons beperkt tot de berekening van VaR voor een gegeven portefeuille. In deze paragraaf zullen we een stap verder gaan en de verbinding leggen met beleggingsallocaties. Markowitz (1952) introduceerde het concept van gemiddelde/variantie-efficiëntie. In zijn definitie is een beleggingsportefeuille efficiënt als deze voor een maximaal toegestane variantie het hoogste verwachte rendement oplevert. Aangezien de variantie in zijn efficiëntieraamwerk niets anders is dan een risicomaatstaf, ligt het voor de hand gegeven de discussie in Paragraaf 1 de variantie te vervangen door een maatstaf voor neerwaarts risico, zie bijvoorbeeld Sortino en Price (1994), Brouwer (1997), Dert en Oldenkamp (1997), Lucas en Klaassen (1998) en Lucas en Dert (1998). In de context van VaR is het idee als volgt. Gegeven een grens op de maximaal toegestane VaR wordt gezocht naar de beleggingsallocatie die het verwachte rendement maximaliseert.

Natuurlijk is voor de bepaling van efficiënte portefeuilles weer een goede schatting van de VaR nodig. De problemen en wijzen van aanpak zoals geschetst in de vorige paragraaf, zijn dus evenzeer hier van toepassing. Er is echter wel een duidelijk verschil. Terwijl we tot nu toe slechts geïnteresseerd waren in de berekening van de VaR voor 1 portefeuille, willen we nu de VaR voor een grote verzameling portefeuilles efficiënt kunnen berekenen. Alleen dan zijn we in staat op adequate wijze efficiënte portefeuilles samen te stellen. De meeste studies tot dusver hebben zich dan ook beperkt tot simpele parametrische modellen voor de beschrijving van aandelenrendementen, zoals de normale verdeling, de log-normale verdeling en de Student t verdeling. De constructie van efficiënte portefeuilles voor ingewikkelder modellen is nog relatief onontgonnen terrein.

Een andere extra complicatie bij het gebruik van VaR voor beleggingsallocaties komt naar voren wanneer we nadenken over de gevolgen van misspecificatie. In Paragraaf 2 hebben we het effect van misspecificatie besproken op de VaR voor een gegeven portefeuille. In de huidige context is het echter mogelijk dat ten gevolge van misspecificatie de portefeuille zelf ook verandert. De efficiënte portefeuille voor normaal verdeelde beleggingsopbrengsten kan bijvoorbeeld een heel andere zijn dan die voor Student t verdeelde beleggingsopbrengsten, zie Lucas en Klaassen (1998). Dergelijke verschuivingen in de portefeuille kunnen een additioneel effect hebben op de mate van misspecificatie van de VaR, zie Lucas en Klaassen (1998).

Het gebruik van een maatstaf voor neerwaarts risico kan zowel leiden tot andere als tot identieke efficiënte portefeuilles. Ben duidelijk geval van het laatste komen we tegen bij modellen voor beleggingsopbrengsten die gekarakteriseerd worden door slechts twee parameters, bijvoorbeeld de normale verdeling. Behalve in zeer speciale gevallen is het dan namelijk mogelijk voor een gegeven verwacht rendement een 1-op-1 afbeelding te vinden van de variantie op de maatstaf voor neerwaarts risico. Het is duidelijk dat we verschillen in efficiënte allocaties kunnen verwachten als beleggingsopbrengsten bijvoorbeeld asymmetrisch zijn verdeeld. Een van de eenvoudigste situaties waarin zich dergelijke beleggingsopbrengsten voordoen, is de situatie waarin één van de beleggingsobjecten een optie is. Dert en Oldenkamp (1997), Ahn et al. (1999), en Lucas en Dert (1998) hebben de gevolgen van opties op het VaR-efficiëntieraamwerk onderzocht. De conclusies van dit onderzoek geven veel inzicht in enkele wezenlijke tekortkomingen van VaR en van maatstaven voor neerwaarts risico in het algemeen. Wanneer het mogelijk is in een risicovrije beleggingscategorie, in aandelen en in opties op die aandelen te beleggen, kan worden aangetoond dat het optimaal is vanuit het oogpunt van gemiddelde/VaR-efficiëntie (i) zoveel te beleggen in de risicovrije categorie dat precies wordt voldaan aan de VaR restrictie, en (ii) de rest van het geld te beleggen in een call-optie op het aandeel. Intuïtief is dit resultaat duidelijk. Met behulp van de risicovrije belegging wordt gegarandeerd aan de VaR restrictie voldaan. Met behulp van de belegging in de call-optie wordt vervolgens geprofiteerd van het potentieel van aandelenbeleggingen (hoog verwacht rendement). Door het uitbetalingspatroon van een call-optie, kan men profiteren van dit hoge verwachte rendement zonder dat dit consequenties heeft voor het neerwaarts risicoprofiel van de beleggingsportefeuille als geheel.

Dert en Oldenkamp (1997) en Lucas en Dert (1998) bestuderen tevens welke uitoefenprijs het beste kan worden gekozen voor de call-optie. Verondersteld is dat aan de veronderstellingen van Black en Scholes (1973) is voldaan. De optimale keuze van de uitoefenprijs leidt dan tot een merkwaardig resultaat: het blijkt optimaal de uitoefenprijs zo hoog mogelijk te kiezen. Dert en Oldenkamp (1997) noemen dit het 'casino-effect' en bewijzen dat dit effect robuust is voor de waarde van n in de neerwaarts-risicomaatstaf in (1). Wanneer dus een maatstaf voor neerwaarts risico wordt gebruikt in de context van beleggingsallocaties in combinatie met het verwachte rendement als prestatiemaatstaf, worden portefeuilles geconstrueerd die slechts een kleiner verlies dan de VaR opleveren bij zeer extreme fluctuaties van de aandelenprijzen. Dergelijke portefeuilles lijken niet erg relevant voor praktische doeleinden. Het is mogelijk het casino-effect te verzachten dan wel te voorkomen door het stellen van additionele rendementseisen. Dit laat echter het wezenlijke probleem ongemoeid: de combinatie van het gemiddelde met een maatstaf voor neerwaarts risico levert een incomplete karakterisering op van de preferenties van de doorsnee-belegger. Beide maatstaven zijn namelijk invariant ten opzichte van verschillen in uitbetalingspatronen boven de drempelwaarde r^* uit (1). Een doorsnee-belegger is daarentegen niet indifferent wat betreft dergelijke verschillen. Dit betekent dat in de context van het kiezen van beleggingsallocaties zowel het gemiddelde/variantie-raamwerk van Markowitz grote bezwaren heeft, zie Leland (1996) en Lhabitant (1997), alsook het gemiddelde/neerwaarts-risico-raamwerk. Dit lijkt erop te duiden dat voor de bepaling van efficiënte allocaties een uitgebreidere karakterisering nodig is van de preferenties van beleggers voor verschillende uitbetalingspatronen. Een dergelijke karakterisering kan gebruik maken van meer dan de gebruikelijke twee kengetallen van rendementsverdelingen, dan wel van algemene nutsspecificaties, zie ook Lucas en Dert (1998).

4. Gebruik van VaR voor toezicht

In deze paragraaf bespreken we kort de toepassingen van VaR voor toezicht. Het is duidelijk dat VaR kan worden gebruikt voor intern toezicht. Een opmerkelijke doorbraak is echter dat VaR tegenwoordig ook wordt gebruikt in het algemene toezicht op banken. Zoals vermeld in de inleiding is het marktrisico van een bankportefeuille in de huidige financiële context van groot belang. Gegeven het bestaan van depositogarantieregelingen en het oogmerk van toezichthouders is een interesse van toezichthouders voor de VaR van bankportefeuilles dan ook niet vreemd: door banken genomen excessieve risico's kunnen desastreus zijn voor de solvabiliteit van de bank en daardoor een bron van instabiliteit vormen voor de financiële sector als geheel (systeemrisico). Dergelijke risico's kunnen worden beperkt door van de banken te eisen dat zij kapitaalreserves aanhouden in overeenstemming met de door hen ingenomen risicovolle posities. Zoals vermeld in de inleiding is dit voor bijvoorbeeld kredietportefeuilles gebeurd middels het Bazelse akkoord uit 1988. Dat de implementatie van de regels uit dit akkoord tot op zekere hoogte de gewenste resultaten heeft gehad, blijkt uit bijvoorbeeld Ito en Sasaki (1998) en Inwon Song (1998).

De richtlijnen van Bazel (1988) zijn zeer eenvoudig. Juist door deze eenvoud zijn weer allerhande complicaties mogelijk. Zo resulteert een lening van 100 Euro aan Koninklijke Olie (Shell) in eenzelfde kapitaalvereiste als een lening van 100 Euro aan de kruidenier op de hoek. Dit zou ertoe kunnen leiden dat banken binnen de categorie van bedrijfsleningen relatief te veel leningen opnemen met een hoog risico. Deze leveren namelijk een hoger verwacht rendement, terwijl de kosten in termen van huidig kapitaalbeslag hetzelfde zijn. Vanuit de financiële sector is dan ook met succes voorgesteld risicometing over te laten aan de banken zelf. Zij zijn degenen die het beste de risico's van de door de bank ingenomen posities kunnen inschatten.

Hoewel de vrijheid van banken wat betreft het vaststellen van het door hen benodigde kapitaalbeslag nog niet is toegestaan voor kredietrisico, is dit wel mogelijk voor het marktrisico. In het amendement op het akkoord uit 1988, staat Bazel (1996b) namelijk toe dat banken hun eigen interne modellen gebruiken voor de bepaling van hun risico. Op die manier hopen de toezichthouders en de financiële sector allerlei mora1 hazard problemen te voorkomen die zich gemakkelijk voordoen bij de meer eenvoudige regelingen

De interne-modellenaanpak werkt ruwweg als volgt. Een bank bepaalt met behulp van zijn interne model de VaR van zijn portefeuille. Vervolgens zijn de kapitaalvereisten direct gerelateerd aan deze VaR. In het bijzonder moet de bank een kapitaal aanhouden gelijk aan 3 keer de VaR. Het getal 3 is voornamelijk een consensusuitkomst. Stahl(1997) geeft echter ook enige theoretische argumenten voor het gebruik van de factor 3. Het is duidelijk dat deze aanpak resulteert in een kapitaalbeslag dat direct gerelateerd is aan de risicograad van de ondernomen activiteiten.

Ook bij de interne-modellenaanpak duiken echter weer mora1 hazard problemen op. Deze betreffen met name de geschiktheid van de interne modellen voor het meten van risico. Aangezien de toezichthouder de constructie van de modellen geheel overlaat aan de bank zelf, worden de mogelijkheden voor direct toezicht op de geschiktheid van de modellen voor daadwerkelijke risicometing beperkt. Het gevaar zou nu kunnen bestaan dat de banken modellen construeren die een te lage VaR produceren: het kapitaalbeslag voor de bank en de daarmee gemoeide kosten zijn dan lager. De daadwerkelijke risico's worden echter hoger. De toezichthouders hebben geprobeerd dit mora1 hazard probleem op te lossen door de interne-modellenaanpak uit te breiden met een procedure voor het achteraf toetsen van modeluitkomsten (back-testing), zie Bazel (1996a). Het bepalen van de geschiktheid van interne modellen met behulp van toetsen achteraf is slechts beperkt betrouwbaar, zie Kupiec (1995). De procedure werkt als volgt. De bank moet op dagelijkse basis zowel zijn VaR voor de volgende dag als het over de afgelopen dag gerealiseerde verlies rapporteren aan de toezichthouder. Indien het interne risicomodel geschikt is, zal bij een VaR betrouwbaarheidsniveau van 99% eens in de honderd dagen het gerealiseerde verlies groter zijn dan de voor die dag bepaalde VaR. Dit laatste noemen we een schending van de VaR. Bekeken kan worden of over een langere periode het aantal schendingen van de VaR overeenkomt met het voor de VaR geldende betrouwbaarheidsniveau. Naarmate het aantal schendingen groter wordt, wordt de geschiktheid van het interne model meer in twijfel getrokken. Bij een te groot aantal schendingen volgt een directe toets van het model door de toezichthouder. Om de banken te voorzien van voldoende stimulansen om geschikte interne modellen te construeren bevat de beschreven toetsprocedure ook een boetestructuur. Indien het aantal schendingen in het verleden klein genoeg was, wordt het kapitaalbeslag berekend als 3 maal de gerapporteerde VaR. Wanneer het aantal schendingen echter te groot wordt, neemt de factor 3 stap voor stap toe met het aantal schendingen tot het punt waar een directe toets van het interne model onvermijdelijk is. In dat laatste geval wordt de factor 3 vervangen door de factor 4.

Begrijpelijkerwijs kan de vrijheid van individuele banken in de ontwikkeling van hun interne model ertoe leiden dat het risico van dezelfde portefeuille geheel anders wordt ingeschat door verschillende banken, zie bijvoorbeeld Gizycki en Hereford (1998). Verder beargumenteert Lucas (1998) dat de interne-modellenaanpak in combinatie met de door Bazel (1996a) voorgestelde procedure voor het achteraf toetsen van de modellen, de genoemde mora1 hazard problemen niet oplost: banken zijn nog steeds geneigd modellen te construeren die een te lage VaR opleveren. Om deze problemen op te lossen dient de maximale boetefactor van 4 verder verhoogd te worden en eventueel de initiële factor van 3 verlaagd te worden.

Een heel ander bezwaar tegen de interne-modellenaanpak komt van de zijde van medewerkers van de Federal Reserve, zie Kupiec en O'Brien (1995a,b,1996,1997). Hun bezwaar tegen de Bazelse aanpak is drieledig. Allereerst neemt de interne-modellenaanpak de mora1 hazard problemen niet weg, maar verschuift deze naar een ander niveau. Ten tweede is de geschiktheid van interne modellen uitermate moeilijk betrouwbaar vast te stellen met toetsprocedures achteraf, zie ook Kupiec (1995). Ten derde is de aanpak gebaseerd op VaR en interne modellen te gesimplificeerd. Deze aanpak vereist namelijk de rapportage van VaR op dagelijkse basis gegeven een vrij rigide model. Er zijn echter situaties denkbaar waarin door banken posities worden ingenomen die volgens het model zeer risicovol zijn, maar veel minder risicovol volgens betrouwbare externe informatie. Ook is het mogelijk dat ingenomen posities veel minder risicovol zijn dan volgens het model wordt aangegeven, omdat de bank de mogelijkheid heeft de portefeuille af te wikkelen voor de VaR planningshorizon ingeval van negatieve prijsontwikkelingen. Kupiec en O'Brien (1997) stellen dan ook voor de banken nog meer vrijheid te laten in hun bepaling van kapitaalreserves. In hun aanpak, de toezeggingsaanpak (pre-commitment approach), noemt het management van de bank op kwartaalbasis een VaR of soortgelijke maatstaf. Deze VaR moet worden aangehouden als kapitaalreserve. Merk op dat deze VaR niet op een model gebaseerd hoeft te zijn. Wanneer een schending van de VaR heeft plaatsgevonden na een kwartaal, wordt aan de bank een boete opgelegd. De vorm van deze boete (vast bedrag, proportioneel met de overschrijding, enz.) kan zodanig worden gekozen dat de bank wordt gestimuleerd het echt door hem ingeschatte risico te noemen aan de toezichthouder. De eerste experimenten met deze aanpak lijken positief, zie Considine (1998), maar ook het commentaar van Parkinson (1998).

Zowel het gebruik van de interne-modellenaanpak met toetsen achteraf, alsook de toezeggingsaanpak lijden aan 1 belangrijk manco. Straffen op een inadequaat risicobeheer worden achteraf opgelegd. Dit betekent dat wanneer een bank een groot verlies lijdt zodat hetzij de VaR, hetzij de toezegging wordt geschonden, daarbovenop nog een keer een extra boete wordt geëist door de toezichthouder: de straffen worden uitgedeeld als de partijen er relatief slechter voorstaan. Teneinde dit soort problemen te voorkomen lijkt een studie naar de mogelijkheden van bonus/malus-regelingen in de context van toezicht zeer nuttig. Dergelijk onderzoek staat echter nog slechts in de kinderschoenen.

5. Beperkingen van VaR als risicomaatstaf

In deze paragraaf stip ik kort enkele van de belangrijkste tekortkomingen van VaR aan als sleutelconcept voor risicomanagement. Deze tekortkomingen betreffen de beperkte focus van VaR, de onzekerheid van VaR schattingen, de nadelen van VaR in combinatie met verwachte rendementen, de problemen van VaR bij gedelegeerd risicobeheer en de practische moeilijkheden bij de berekening van VaR.

Allereerst is het duidelijk uit de inleiding van dit artikel dat VaR een plaats heeft binnen kwantitatief risicomanagement. Minstens even belangrijk is het kwalitatieve risicomanagement, zie bijvoorbeeld het faillissement van Barings. Ook binnen de context van kwantitatief risicomanagement levert VaR slechts een partieel beeld van de gelopen risico's. Zo moet de VaR niet worden gezien als het gemiddeld maximale verlies, maar als het minimale verlies dat men eens in de zoveel dagen realiseert. De VaR zegt verder niets over de grootte van dit verlies. Daarvoor moet de VaR methodologie worden uitgebreid met methoden die het gedrag van de beleggingsportefeuille bepalen in situaties met extreme marktvolatiliteit of onvoordelige prijsbewegingen, de zogenaamde stress-toetsen. Bij een stress-toets wordt een extreem scenario geconstrueerd voor een bepaalde sleutelvariabele, bijvoorbeeld een rente, wisselkoers, of aandelenkoers. Vervolgens wordt gekeken naar de eigenschappen van de portefeuille wanneer dit extreme scenario zich voor zou doen. Het is niet altijd makkelijk een consistente beschrijving te geven van het resterende risico in situaties van stress. Kupiec (1998) geeft een interessante manier gebaseerd op VaR in extreme scenarios.

Een tweede beperking van VaR geldt de met de VaR verbonden onzekerheid. De rapportage van een hard getal zoals VaR suggereert veelal ten onrechte een bepaalde mate van zekerheid omtrent de genomen risico's. Zoals echter beschreven in Paragraaf 2, hangt de VaR af van enkele parameters, zoals het gewenste betrouwbaarheidsniveau, de lengte van de schattingsperiode en de lengte van de VaR planningsperiode. In Bazel (1996a,b) zijn enkele richtlijnen hiervoor geformuleerd vanuit het kader van toezicht. De specifieke keuze van deze parameters is echter moeilijk theoretisch te verantwoorden. Verder is het natuurlijk de vraag of financiële instellingen soortgelijke parameters willen/zouden moeten hanteren wanneer zij VaR gebruiken voor hun interne risicomanagement. VaR is dan ook geschikter voor het doen van uitspraken over het relatieve risicogehalte van twee verschillende portefeuilles, dan over het absolute risicogehalte van 1 portefeuille. Zelfs indien men het eens is over de keuze van het betrouwbaarheidsniveau en de lengte van de schattings- en planningsperiode, is de VaR onderhevig aan schattingsfouten en misspecificatiefouten, zie Jorion (1996), Stahl (1997) en Lucas en Klaassen (1998). Het rapporteren van de met de geschatte VaR geassocieerde onzekerheid is dan ook een nuttige oefening. Het voorkomt het te zwaar leunen op slechts 1 of enkele getalletjes voor het beheren van risicovolle posities en het ontwikkelen van strategisch beleid.

De derde beperking van VaR is reeds beschreven in Paragraaf 3. VaR kan niet zonder meer worden gebruikt als alternatieve risicomaatstaf voor de variantie bij de beoordeling van de efficiëntie van beleggingsportefeuilles. VaR weerspiegelt namelijk niet de variatie in uitbetalingspatronen boven een bepaalde drempel, zie ook (1). Beleggers zijn daarentegen niet indifferent voor wat betreft deze variatie.

Een vierde beperking van VaR betreft een conceptueel bezwaar. Volgens Artzner et al. (1997) is VaR geen coherente risicomaatstaf. In het bijzonder is VaR niet subadditief. Met het laatste wordt bedoeld dat het risico van een portefeuille, indien gemeten met VaR, groter kan zijn dan de som van de individuele risicocomponenten van de portefeuille. Dit maakt het moeilijk met behulp van VaR een gedelegeerd risicomanagementbeleid te voeren. Wanneer bijvoorbeeld ieder van de business units zich aan zijn risicolimiet houdt in termen van maximale VaR, kan niet worden gegarandeerd dat het bedrijf als geheel ook voldoet aan de aan haar gestelde risicolimiet. Evenzo is het mogelijk dat iedere handelaar in een dealing room van een bank voldoet aan zijn risicolimiet, terwijl het risico van de dealing room als geheel onacceptabel hoog is. Dergelijke voorbeelden kunnen eenvoudig worden geconstrueerd. Stel we hebben 101 handelaren, die met kans 1/101 een verlies genereren van c Euro. Met kans 100/101 genereren ze een winst/verlies van 0 Euro. We veronderstellen verder dat de gerealiseerde winsten/verliezen zodanig samenhangen, dat nooit 2 handelaren tegelijk verlies maken, en tenminste altijd 1 handelaar verlies maakt. Als we een VaR betrouwbaarheidsniveau aanhouden van 99%, is de VaR voor iedere individuele handelaar gelijk aan 0. De VaR voor alle handelaren gezamenlijk is echter $101 \cdot c$. Aangezien nog niets is gezegd over de grootte van het verlies c, kan de totale VaR onacceptabel hoog zijn. Deze merkwaardige eigenschap van VaR wordt hoofdzakelijk veroorzaakt door het feit dat VaR wel het optreden van een verlies bestraft, maar daarin niet de omvang van het verlies meeweegt. Alternatieve maatstaven voor neerwaarts risico, zoals het verwachte verlies en de semi-variantie (n=1 of n=2 in (1)), hebben deze tekortkoming niet en lijken derhalve meer geschikt voor gedelegeerd risicomanagement.

Tenslotte nog enkele opmerkingen over practische moeilijkheden bij de berekening van VaR. In Paragraaf 2 is al het een en ander vermeld over de mogelijke schattingswijzen van VaR, alsmede over de daarmee gepaard gaande zwaarte en langdurigheid van de berekeningen. Hoewel belangrijk, vormt een ander aspect van de berekening van VaR een veel groter probleem. Voor een grote bank met tal van activiteiten is het moeilijk de voor de VaR benodigde gegevens tijdig en van een voldoende kwalitatief gehalte te verkrijgen. De samenstelling van VaR uit de verschillende posities van de bank in risicovolle beleggingscategorieën vergt het uiterste van de informatievoorziening en de informatiesystemen van de bank. Zonder deze informatie valt er sowieso geen VaR te berekenen. Maar zelfs indien deze informatie er wel is, blijft het conceptueel moeilijk betrouwbare schattingen te krijgen van de correlaties tussen alle verschillende bankactiviteiten en portefeuillekeuzen. Een groot voordeel van VaR ligt dus eerder in de twee belangrijkste neveneffecten dan in de precieze waarde van het VaR getal. Deze neveneffecten zijn: (i) de manier waarop over risicomanagement wordt gedacht, en (ii) de verbeteringen die in informatiesystemen worden aangebracht om te komen tot een enigszins betrouwbare schatting van de VaR.

6. Conclusies

In dit artikel heb ik een overzicht proberen te geven van het concept Value-at-Risk (VaR) alsmede het nut en de beperkingen ervan voor risicomanagement. Zoals blijkt uit het groot aantal recente literatuurverwijzingen, is VaR een zeer modieus en populair onderwerp, zie ook de vele referenties van Schachter (1999). Toch lijkt het bij de VaR-hype te gaan om meer dan een rage. De inburgering van VaR in de financiële sector en de opname van VaR in de richtlijnen voor toezicht geven aan dat het gebruik van VaR structureel gecontinueerd zal worden.

Natuurlijk kleven er tal van nadelen aan VaR, en in dit artikel heb ik geprobeerd enkele hiervan voor het voetlicht te brengen. Het belangrijkste is dat men VaR blijft zien als een bruikbaar ***hulpmiddel*** voor risicomanagement. Indien men daarentegen VaR begint te beschouwen als een afdoende kengetal voor risicobeheer, begeeft men zich op een hellend vlak. Niet-kwantificeerbare vormen van risico zijn minstens even belangrijk als kwantificeerbare risico's. Bovendien moet iedere manager er huiverig voor zijn zich bezig te houden met activiteiten en/of markten waar hij geen verstand van heeft, Taleb (1997). Een gebruik van VaR als risicomaatstaf kan goede diensten doen, mits de gebruiker op de hoogte is van de belangrijkste tekortkomingen en beperkingen van VaR.

Er zijn nog tal van mogelijke onderzoeks- en toepassingsgebieden voor VaR. Enkele daarvan zijn besproken in dit artikel. Verder laat de lange en groeiende lijst verwijzingen van Schachter (1999) zien dat de ontwikkeling en toepassing van VaR ook daadwerkelijk verder gaat. Een van de belangrijkste onderzoekslijnen lijkt mij de ontwikkeling van aan VaR gerelateerde maatstaven voor kredietrisico, zie ook J.P. Morgan (1999b). De toepassing van VaR voor kredietrisico kan op den duur leiden tot een soortgelijke doorbraak op het gebied van toezicht als indertijd de toepassing van VaR op marktrisico, Bazel (1996b).

Referenties

Ahlstedt, M. (1997): "Exchange Rate, Interest Rate and Stock Market Price Volatility for Value-at-Risk Analysis," Working paper, Bank of Finland.

Ahn, D.-H., J. Boudoukh, M. Richardson en R. Whitelaw (1999): "Optimal Risk Management Using Options," *Journal of Finance* 54, February, forthcoming.

Artzner, P., F. Delbaen, H.-M. Eber, en D. Heath (1997): "Definition of coherent measures of risk," manuscript, Cornell University, Ithaca.

Bawa, V.S. (1978): "Safety-first, stochastic dominance and optimal portfolio choice," *Journal of Financial and Quantitative Analysis 13,25527 1.*

Bazels Comité voor Banksupervisie (1988): "International convergence of capita1 measurement and capita1 standards," Rapport 4.

Bazels Comité voor Banksupervisie (1996a), "Supervisory framework for the use of "backtesting" in conjunction with the intemal models approach to market risk capita1 requirements," Rapport 22.

Bazels Comité voor Banksupervisie (1996b), "Amendment to the capita1 accord to incorporate market risks," Rapport 24.

Berger, A.N., R.J. Herring, en G.P. Szergö (1995): "The role of capita1 in financial institutions," *Journal of Banking and Finance* 19, 393-430.

Billio, M., en L. Pelizzon (1997): "A Switching Volatility Approach to Improve the Estimation of the Value-at-Risk," manuscript.

Black, F., en M. Scholes (1973): "The pricing of options and corporate liabilities," *Journal of Political Economy* **81**, 637--654.

Boorsma, M.A. (1998): "Een overzichtsstudie van Value-at-Risk-methoden voor lineaire en niet-lineaire portefeuilles," ongepubliceerde Doctoraalscriptie, Vrije Universiteit Amsterdam.

Brouwer, F. (1997): *Applications of the mean-downside risk investment model,* unpublished Ph.D. Thesis, Vrije Universiteit Amsterdam.

Butler, J. S., en B. Schachter (1998): "Estimating Value at Risk With a precision Measure By Combining Kemel Estimation With Historical Simulation," *Review of Derivatives Research* **1**, 371-390.

Campbell, J.Y., A.W. Lo, en A.C. MacKinlay (1997): *The Econometrics of Financial Markets*, Princeton: Princeton University Press.

Christiansen, C. (1998): "Value at Risk using the Factor-ARCH model," Working paper, Aarhus School of Business.

Christoffersen, P., en F.X. Diebold (1997): "How relevant is volatility forecasting for financial risk management," Working paper, University of Pennsylvania.

Christoffersen, P., F.X. Diebold en T. Schuermann (1998): "Horizon Problems and Extreme Events in Financial Risk Management," *Economic Policy Review* 4, Federal Reserve Bank of New York, (October), 109-118.

Considine, J. (1998): "Pilot exercise — pre-commitment approach to market risk," *Economic Policy Review* 4, Federal Reserve Bank of New York, (October), 131-135.

Danielsson, J., en C.G. de Vries (1997a): "Value at Risk and Extreme Returns," Research Memorandum, University of Iceland.

Danielsson, J., en C.G. de Vries (1997b): "Beyond the Sample: Extreme Quantile and Probability Estimation," Research Memorandum, University of Iceland.

Danielsson, J., Ph. Hartmann en C.G. de Vries (1998): "The Cost of Conservatism: Extreme Returns, Value-at-Risk, and the Basle 'Multiplication Factor'," *Risk* **11** (January), 101-103.

Dert, C.L., en B. Oldenkamp (1997): "Optimal guaranteed return portfolios and the casino effect," VU Research Memorandum 1997-25, Vrije Universiteit Amsterdam.

Diebold, F.X., T. Schuermann en J.D. Stroughair (1998): "Pitfalls and Opportunities in the Use of Extreme Value Theory in Risk Management," Working paper, University of Pennsylvania.

Dowd, K. (1998): *Beyond value at risk: the new science of risk management.* New York: Wiley.

Duffie, D., en J. Pan (1997): "An overview of value at risk," *Journal of Derivatives 4,7-49.*

Fishbum, P. (1977): "Mean-risk analysis with risk associated with below market returns," *American Economic Review 67,* 116-126.

Fusai, G., en E. Luciano (1998): "Measuring VaR under optimal and suboptimal portfolio policies," manuscript, University of Torino.

Gizycki, M., en K. Hereford (1998): "Assessing the dispersion in banks' estimates of market risk: the results of a value-at-risk survey," Discussion paper 1, October, Australian Prudential Regulation Authority.

Hill, B.M. (1975): "A simple general approach to inference about the tail of a distribution," *Annals of Statistics 3,* 1163-1173.

Hull, J. (1989): *Options, Futures, and Other Derivative Securities.* Englewood Cliffs: Prentice Hall.

Ito, T., en Y.N. Sasaki (1998): "Impacts of the Basle Capita1 Standard on Japanese Banks' Behavior," N.B.E.R. Discussion Paper 6730, Cambridge, Massachusetts.

Inwon Song (1998): "Korean banks' responses to the strengthening of capita1 adequacy requirements," Pacific Basin Working Paper Series 98-01, Federal Reserve Bank of San Francisco.

Jorion, Ph. (1995): *Big Bets Gone Bad : Derivatives and Bankruptcy in Orange County.* Orlando: Academic Press.

Jorion, Ph. (1996): "Risk^2: measuring the risk in Value at Risk," Financial Analysts Journal, (November/December), 47-56.

Jorion, Ph. (1997): *Value at Risk : The New Benchmark for Controlling Market Risk.* Irwin.

J.P. Morgan (1999a): Riskmetrics ™ technical document, http://www.riskmetrics.com.

J.P. Morgan (1999b): Creditmetrics ™ technical document, http://www.creditmetrics.com.

Kahneman, D., en A. Tversky (1979): "Prospect theory: an analysis of decision under risk," *Econometrica 47, 263-29 1.*

Kataoka, S. (1963): "A stochastic programming model," *Econometrica* 31, 181-196.

Kupiec, P. (1995): "Techniques for Verifying the Accuracy of Risk Measurement Models," *Journal of Derivatives* 3 (Winter), 73-84.

Kupiec, P. (1998): "Stress Testing In a Value at Risk Framework," Working paper, J. P. Morgan, (March).

Kupiec, P., en J. O'Brien (1995a): "Internal affairs," *Risk* 8(5), *43-48.*

Kupiec, P., en J. O'Brien (1995b): "Model alternative," *Risk* 8(6), 37-41.

Kupiec, P., en J. O'Brien (1996): "Commitment is the key," *Risk* 9(9), *60-64.*

Kupiec, P., en J. O'Brien (1997): "The pre-commitment approach: using incentives to set market risk capita1 requirements, " Finance and Economic Discussion Series 1997-14, Federal Reserve Board, Washington DC.

Leland, H. (1996): "Beyond mean-variance: performance measurement of portfolios using options or dynamic strategies," Working paper RPF-263, Haas School of Management, University of California, Berkeley.

Lhabitant, F.-S. (1997): "Enhancing portfolio performance using options strategies: why beating the market is easy," Working paper 9703, Institute of Banking and Financial Management, Lausanne.

Lucas, A. (1998): "Testing backtesting: an evaluation of the Basle guidelines for backtesting intemal risk management models of banks," VU Research Memorandum 1998- 1, Vrije Universiteit Amsterdam.

Lucas, A., en C.L. Dert (1998): "On the inefficiency of portfolio insurance and caveats to the mean/downside-risk framework," VU Research Memorandum 1998-57, Vrije Universiteit -Amsterdam.

Lucas, A., en P. Klaassen (1998): "Extreme returns, downside risk, and optimal asset allocation," *Journal of Portfolio Management* 25, 71-79.

Luciano, E. (1998): "Fulfillment of regulatory requirements on VaR and optimal portfolio policies," manuscript, University of Torino.

Markowitz, H. (1952): "Portfolio selection," *Journal of Finance* 7, 77-91.

Muralidhar, A., en K. Asas-Syed (1998): "Asset-liability value at risk," Working Paper 98-023, World Bank.

Pagan, A. (1996): "The econometrics of financial markets," *Journal of Empirical Finance 3,* 15-102.

Parkinson, P. (1998): "Commentary," *Economic Policy Review* 4, Federal Reserve Bank of New York, (October), 155-159.

Prelec, D. (1998): "The probability weighting function," *Econometrica* **66**, 497-527.

Roy, A. (1952): "Safety-first and the holding of assets," *Econometrica* **20**, 43 1-449.

Schachter, B. (1999): http://www.gloriamundi.org.

Silverman, B.W. (1986): *Density Estimation for Statistical and Data Analysis,* London: Chapman-Hall.

Sortino, F., en L.N. Price (1994): "Performance measurement in a downside risk framework," *Journal of Investing.*

Sortino, F., en R. van der Meer (1991): "Downside risk," *Journal of Portfolio Management,* summer, 27-3 1.

Stahl, *G.* (1997): "Three cheers," *Risk* **10**, 67-69.

Straetmans, *S.* (1998): *Extreme Financial Returns and their Comovements,* ongepubliceerd proefschrift, Tinbergen Institute, Erasmus University Rotterdam.

Studer, G., en H.-J. Lüthi (1997): "Analyzing Nonlinear Portfolios with Quadratic Maximum Loss," *NETEXPOSURE: The Electronic Journal of Financial Risk,* http://www.netexposure.co.uk/, Issue 1, September.

Srivastava, S. (1998): "Value at Risk Analysis of a Leveraged Swap," Working paper, Carnegie Mellon University.

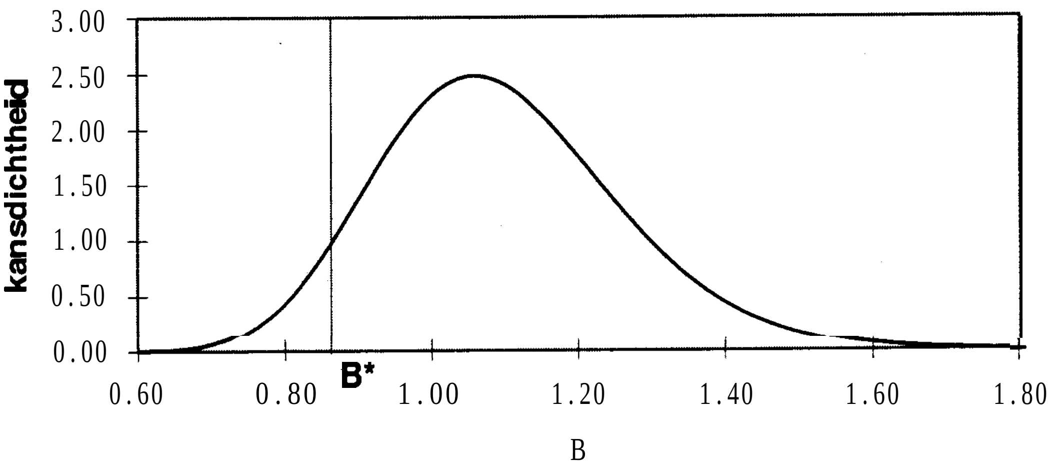
Swaan, T. de (1996): "Risicomanagement: de invalshoek van de toezichthouder," Pre-advies voor de NIBE-jaardag 1996, De Nederlandsche Bank N.V., Amsterdam.

Taleb, N. (1997): "Against Value-at-Risk," http://pw1.netcom.com/~ntaleb/jorion.html.

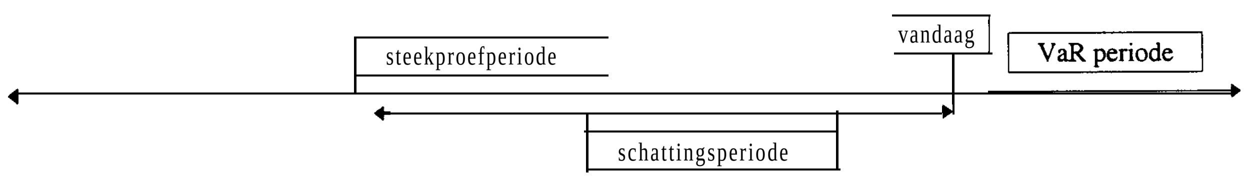
Telser, L. (1955): "Safety-first and hedging," *Review of Economic Studies 23,* 1-16.

Tversky, A., en D. Kahneman (1992): "Cumulative prospect theory: an analysis of decision under uncertainty," *Journal of Risk and Uncertainty* **5**, 297-323.

Tversky, A., en P. Wakker (1995): "Risk attitudes and decision weights," *Econometrica 63,* 1255-1280.



Figuur 1: Value-at-Risk in relatie tot de kansverdeling van mogelijke beleggingsuitkomsten B en neerwaarts risico. De initiële hoeveelheid geld is gelijk aan 1. Beleggingsuitkomsten zijn log-normaal verdeeld met gemiddelde 1.1 en standaarddeviatie 0.15.



Figuur 2: Tijdbalk voor het gebruik van data in VaR berekeningen