

VU Research Portal

Irmgard Gawehn en de topologische karakterisering van variëteiten, een poging tot rehabilitatie

Koetsier, T.; van Mill, Jan

published in

Nieuw archief voor de wiskunde
2014

[Link to publication in VU Research Portal](#)

citation for published version (APA)

Koetsier, T., & van Mill, J. (2014). Irmgard Gawehn en de topologische karakterisering van variëteiten, een poging tot rehabilitatie. *Nieuw archief voor de wiskunde*, 100-110.

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal ?

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

E-mail address:

vuresearchportal.ub@vu.nl



UvA-DARE (Digital Academic Repository)

Irmgard Gawehn en de topologische karakterisering van variëteiten, een poging tot rehabilitatie

Koetsier, T.; van Mill, J.

Published in:
Nieuw Archief voor Wiskunde

[Link to publication](#)

Citation for published version (APA):

Koetsier, T., & van Mill, J. (2014). Irmgard Gawehn en de topologische karakterisering van variëteiten, een poging tot rehabilitatie. *Nieuw Archief voor Wiskunde*, 5/15(2), 100-110.

General rights

It is not permitted to download or to forward/distribute the text or part of it without the consent of the author(s) and/or copyright holder(s), other than for strictly personal, individual use, unless the work is under an open content license (like Creative Commons).

Disclaimer/Complaints regulations

If you believe that digital publication of certain material infringes any of your rights or (privacy) interests, please let the Library know, stating your reasons. In case of a legitimate complaint, the Library will make the material inaccessible and/or remove it from the website. Please Ask the Library: <http://uba.uva.nl/en/contact>, or a letter to: Library of the University of Amsterdam, Secretariat, Singel 425, 1012 WP Amsterdam, The Netherlands. You will be contacted as soon as possible.

Teun Koetsier

Afdeling Wiskunde

Faculteit der Exacte Wetenschappen

Vrije Universiteit Amsterdam

t.koetsier@vu.nl

Jan van Mill

Korteweg-de Vries Instituut voor Wiskunde

Universiteit van Amsterdam

j.vanmill@uva.nl

Biografie Irmgard Gawehn (1900–1977)

Irmgard Gawehn en de topologische karakterisering van variëteiten, een poging tot rehabilitatie

Irmgard Gawehn was een Duitse topologe die van 1928 tot 1930 assistent was van L.E.J. Brouwer aan de Universiteit van Amsterdam. Zij promoveerde aan de Universiteit van Heidelberg en de tekst van haar dissertatie werd in 1928 gepubliceerd in de *Mathematische Annalen*. In haar proefschrift wordt (onder meer) een fraaie topologische karakteriseringsstelling van het boloppervlak bewezen. In de tachtiger jaren van de vorige eeuw zaaide Hans Freudenthal (1905–1990) met betrekking tot Irmgard Gawehn ernstige twijfel. Volgens hem had zij haar dissertatie niet zelf geschreven. In dit artikel gaan Teun Koetsier en Jan van Mill zowel in op de topologische karakterisering van variëteiten als op de beweringen van Freudenthal. Ze komen tot de conclusie dat er onvoldoende gronden zijn om aan te nemen dat Gawehn heeft gefraudeerd.

Fraude in de wetenschappelijke wereld heeft de laatste jaren de belangstelling van zowel de pers als de universitaire wereld. Aan de carrière van Henk Buck van de Technische Universiteit Eindhoven, lid van de Koninklijke Academie van Wetenschappen (KNAW), die naar de verwachting van velen een Nobelprijs zou gaan winnen, kwam een voortijdig einde toen hij in samenwerking met Jaap Goudsmit van de Universiteit van Amsterdam in 1990 in *Science* een artikel publiceerde over de ontwikkeling en de werking van een nieuw medicijn tegen hiv, dat op omstreden onderzoek bleek te zijn gebaseerd. René Diekstra van de Universiteit Leiden legde zijn functie neer nadat een commissie onder voorzitterschap van de Groningse hoogleraar persoonlijkheidspsychologie, Willem Hofstee, conclu-

deerde dat zijn wetenschappelijke handelen 'onzorgvuldig' was geweest. Oud-hoogleraar Mart Bax van de Vrije Universiteit in Amsterdam heeft zich zo'n twintig jaar lang schuldig gemaakt aan ernstig wetenschappelijk wan-gedrag, valsheid in geschrifte en zelfplagiaat. Diederik Stapel van de Universiteit Tilburg heeft in publicaties gebruik gemaakt van vervalste gegevens. Soms wordt iemand ten onrechte van fraude beschuldigd. Dat zou het geval kunnen zijn bij VU-toeconoom Peter Nijkamp die wordt beschuldigd van ettelijke gevallen van zelfplagiaat. De VU heeft een onderzoekscommissie ingesteld.

Wetenschappelijke fraude is iets van alle tijden. Het varieert van kleine fraude, als het selectief weglaten van onwelgevallige resultaten of het niet citeren van een colle-

ga wiens werk je wel hebt gebruikt, tot aan omvangrijke fraudes, zoals het vervalsen van gegevens.¹ Het is bekend dat door het beleid van universitaire bestuurders die te veel waarde toekennen aan citatieanalyses en impactfactoren, de huidige generatie onderzoekers onder grote druk staat. Wetenschappelijke tijdschriften krijgen vaker dan voorheen stukken aangeboden die geheel of gedeeltelijk op plagiaat berusten. In dit artikel gaat het om een beschuldiging van fraude in de wiskunde. Daarbij speelt de topologe Irmgard Gawehn (1900–1977) de centrale rol. Zij promoveert aan de Universiteit van Heidelberg. In de dissertatie wordt (onder meer) een fraaie topologische karakteriseringsstelling van het boloppervlak bewezen en de tekst van de dissertatie wordt in 1928 gepubliceerd in de *Mathematische Annalen*[18]. Aan het begin van dat jaar wordt zij assistent bij L.E.J. Brouwer (1881–1966) aan de Universiteit van Amsterdam. Zij is een vrouwelijke topoloog die aan het begin staat van geweldige ontwikkelingen die uiteindelijk leiden tot topologische karakteriseringsstellingen van eindig-dimensionale variëteiten, resultaten waar topwiskundigen over de gehele wereld hun krachten aan hebben gewijd. In de tachtiger jaren van de vorige eeuw zaait Hans



Drie foto's van Irmgard Gawehn (1900–1977). De eerste foto van Irmgard Gawehn komt uit het Universitätsarchiv Heidelberg, de tweede uit het Brouwer-archief en de derde uit een privéarchief.

Freudenthal (1905–1990) met betrekking tot Irmgard Gawehn ernstige twijfel. Volgens hem heeft zij haar dissertatie niet zelf geschreven, maar is het werk van de hand van een mannelijke topoloog, die een minnaar van Gawehn zou zijn geweest. Zowel in de Nederlandse versie als in de wetenschappelijke Engelse versie van zijn mooie biografie van Brouwer bespreekt Dirk van Dalen de kwestie. Op basis van gesprekken met Freudenthal concludeert hij: “Gawehn heeft haar dissertatie inderdaad niet zelf geschreven” [10, p. 325] en [11, p. 568]. Reden genoeg voor ons om de zaken eens op een rij te zetten. De ingrediënten van het verhaal zijn: een prachtig topologisch resultaat, een zware beschuldiging aan het adres van een topologe en een mysterieuze maar briljante topologische ghostwriter. We zullen ingaan op de wiskundige kant van het verhaal en een doorkijkje geven naar spannende ontwikkelingen die mede zijn voortgekomen uit het centrale resultaat in de dissertatie van Gawehn. We gaan ook in op de fraudekwestie en we zullen tot een andere conclusie komen dan Freudenthal.

Topologische karakterisering van variëteiten

Onder een *topologische ruimte* wordt in dit artikel een deelruimte van een euclidische ruimte \mathbb{R}^n verstaan.

Topologen zijn verzot op stellingen die de topologie van belangrijke structuren in eenvoudige termen vatten. Een belangrijke en bekende stelling in dit verband is die van Brouwer [5]: de *Cantor-verzameling*² is de unieke niet-lege compacte topologische ruimte C die geen geïsoleerde punten³ bezit en van (topologische) dimensie⁴ nul is. Bezie het product $X = C \times C$ in \mathbb{R}^2 . Het is eenvoudig na te gaan

dat X voldoet aan de criteria van Brouwers stelling en dus zijn C en X topologisch dezelfde objecten. Het leuke van een goede karakteriseringsstelling is dat als die eenmaal is gevonden, het herkennen van topologisch equivalente structuren veelal een trivialiteit is geworden.

Het bewijs van Brouwers karakterisering van de Cantor-verzameling is eenvoudig. Stel dat er twee ruimten X en Y zijn die aan de voorwaarden van Brouwer voldoen. Je kunt dan gemakkelijk twee isomorfe eindig vertakkende bomen T_X en T_Y bestaande uit clopen⁵ partities van X respectievelijk Y construeren met de eigenschap dat de doorsnijding van elk van hun takken uit precies één element bestaat. Een punt van X correspondeert met een unieke tak in T_X die op zijn beurt correspondeert met een unieke tak in T_Y waardoor een uniek punt $f(x)$ uit Y wordt bepaald. De aldus gevonden functie $f : X \rightarrow Y$ is een homeomorfisme. Voor een precies bewijs, zie Van Mill [26, Theorem 1.5.5].

Een *variëteit* is een topologische ruimte die lokaal niet kan worden onderscheiden van een euclidische ruimte van een specifieke dimensie. Een lijn en een cirkel zijn eendimensionale variëteiten, een vlak en het oppervlak van een bal zijn tweedimensionale variëteiten. Elk punt van een n -dimensionale variëteit heeft een omgeving die homeomorf is met een open deelverzameling van de n -dimensionale euclidische ruimte \mathbb{R}^n . Variëteiten staan centraal in onder meer de meetkunde en de theoretische natuurkunde. Je kunt er complexe structuren mee beschrijven, bijvoorbeeld door ze uit te rusten met additionele structuren zoals groepsstructuren, differentieerbare structuren en speciale metrieken. In de algemene relativiteitstheorie

spelen vierdimensionale variëteiten een belangrijke rol om grip te krijgen op ruimte en tijd.

Hoe zou je eenvoudige structuren zoals de reële rechte \mathbb{R} en de cirkel

$$\mathbb{S}^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$

topologisch kunnen karakteriseren? Ward [43] bewees in 1936 dat \mathbb{R} de unieke lokaal compacte samenhangende topologische ruimte X is met de eigenschap dat $X \setminus \{x\}$ voor elke x in X in precies twee componenten uiteen valt. Eerder, in 1920, had Moore [29] bewezen dat \mathbb{S}^1 de unieke compacte samenhangende topologische ruimte X is met de eigenschap dat $X \setminus \{x, y\}$ voor elk tweetal verschillende punten x en y in X onsamenvast is. Deze resultaten lijken eenvoudig, maar gaan die van een tentamenopgave aan een eerstejaarsstudent verre te boven.

Een topologische kopie van \mathbb{S}^1 in een ruimte X wordt ook wel een *enkelvoudig gesloten kromme* in X genoemd.

Een lastiger noot om te kraken is het boloppervlak \mathbb{S}^2 in \mathbb{R}^3 , dat wil zeggen,

$$\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

De Stelling van Jordan [21] uit 1893 dat elke enkelvoudig gesloten kromme K in \mathbb{R}^2 het vlak verdeelt in precies twee componenten waarvan K de gemeenschappelijke rand is, bleek hier de sleutel tot succes. Dit resultaat draagt de naam van Jordan, maar het eerste correcte bewijs ervan werd gevonden door Veblen [41] in 1905. Een topologische karakterisering van \mathbb{S}^2 (van tweedimensionale variëteiten, respectievelijk) werd op verschillende plaatsen in de wereld ongeveer gelijktijdig

gevonden door Gawehn [18], Kuratowski [24], Wilder [44], Claytor [8] en Zippin [48]. Zie ook de artikelen van Van Kampen [22], Young [47] en Roberts [35]. Het laatste woord leek te komen van Bing [2]. Hij bewees dat \mathbb{S}^2 topologisch het unieke Peano-continuüm⁶ X is dat wordt gescheiden door elke enkelvoudig gesloten kromme in X , maar door geen enkel puntenpaar. Dit resultaat wordt beschouwd als een van Bings eerste baanbrekende resultaten. Bing was kennelijk niet bekend met het artikel van Gawehn [18] want hij verwijst niet naar haar (ook niet in zijn monumentale werk [4]). Kuratowski [25, p. 529] en Wilder [45] bleken gezien hun verwijzingen wel op de hoogte. Bings resultaat is wel sterker. Zijn enkelvoudig gesloten krommen K scheiden de ruimte in kwestie. Bij Gawehn wordt verondersteld dat een enkelvoudig gesloten kromme K waar zij belangstelling voor heeft de ruimte in precies twee componenten uiteen doet vallen, waarvan K de gemeenschappelijke rand is.

De bewijzen van deze resultaten en dus ook dat van Gawehn lijken op het boven geschetste bewijs van de topologische karakterisering van de Cantor-verzameling. Zij X een ruimte die aan de voorwaarden genoemd in een der karakteriseringsstellingen voldoet. Stel dat we willen bewijzen dat X homeomorf is met de variëteit S . Deze variëteit staat willekeurig fijne triangulaties toe die door ingenieuze topologische constructies ‘isomorf’ kunnen worden nagebootst in de ruimte X . Precies zoals boven geeft dit een homeomorfisme tussen S en X . Vanwege samenhang, is het maken van een isomorf stelsel ‘partities’ echter veel en veel ingewikkelder dan in het geval van de Cantor-verzameling. Het geniale van het bewijs van Gawehn zit hem in de wijze waarop ze deze problemen oplost.

Uit dit alles blijkt dat Gawehns wetenschapsgebied erg in de belangstelling stond, geen wonder dus dat Brouwer in haar geïnteresseerd was.

Gawehn deed de beginstappen in het formidabele project van het topologisch karakteriseren van variëteiten. We slaan heel veel over en formuleren slechts in zeer algemene termen de uitkomsten van dit project. In 1977 bewees Edwards [16] dat bepaalde afbeeldingen van variëteiten van (topologische) dimensie tenminste 5 waarvan het bereik eindig-dimensionaal is, willekeurig dicht kunnen worden benaderd door homeomorfismen. Dergelijke afbeeldingen heten *krimpbaar*. Laat voor het gemak X en Y compacte ruimten zijn. Een continue surjectie $f : X \rightarrow Y$ heet *krimpbaar* als voor elke $\varepsilon > 0$ een home-

omorfisme $\varphi : X \rightarrow X$ bestaat met de volgende eigenschappen:

- voor elke $\mathcal{Y} \in \mathcal{Y}$ is de verzameling $\varphi(f^{-1}(\{\mathcal{Y}\}))$ van diameter kleiner dan ε ,
- de afstand tussen $f \circ \varphi$ en f is kleiner dan ε .

De vezels van de functie f worden door φ uniform gekrompen tot verzamelingen van diameter kleiner dan ε (dit verklaart de terminologie). Vanuit het ‘standpunt’ van de ruimte X is dit dus een formidabel gebeuren. Vanuit het ‘standpunt’ van de ruimte Y gebeurt er niet veel, want voor kleine $\varepsilon > 0$ is $f \circ \varphi$ slechts een kleine aanpassing van de functie f .

Het begrip krimpbaarheid van een afbeelding is afkomstig van Bing [3] die bewees dat $f : X \rightarrow Y$, waarbij X en Y compacte topologische ruimten zijn, krimpbaar is precies dan wanneer f willekeurig dicht kan worden benaderd door homeomorfismen. In het bijzonder zijn X en Y homeomorfe topologische ruimten.

Stel je wilt bewijzen dat de compacte ruimten X en Y homeomorf zijn. Volgens Bing kun je dat doen door een krimpbare afbeelding f van X op Y te construeren en daaruit te concluderen dat X en Y inderdaad homeomorf zijn. Dat lijkt een zeer omslachtige weg om tot het gewenste doel te komen. De kracht van de methode zit hem er echter in dat al het ‘werk’ gedaan dient te worden in de ruimte X en dat Y een ondergeschikte rol speelt. Als X bijvoorbeeld een variëteit is, dan kan diepe meetkunde ingezet worden om van bepaalde afbeeldingen te bewijzen dat ze krimpbaar zijn. In een variëteit kun je nou eenmaal veel beter ‘duwen en trekken’ dan in een willekeurige topologische ruimte. En dat is precies wat Edwards deed.

De vraag werd opgeworpen tussen welke topologische ruimten krimpbare afbeeldingen bestaan en meer in het bijzonder, krimpbare afbeeldingen waarvan het domein een variëteit is.⁷ Quinn [33–34] bewees in 1987 dat naast natuurlijke voorwaarden zo’n afbeelding op een ruimte Y bestaat precies dan wanneer een zekere vervelende \mathbb{Z} -waardige lokale index $i(Y)$ gelijk is aan 0. Bryant, Ferry, Mio en Weinberger [6] bewezen ten slotte in 1996 dat er Y 's bestaan die voldoen aan de natuurlijke voorwaarden maar waarvoor $i(Y)$ ongelijk is aan 0. Zie Daverman [13] voor meer details en referenties. Het duurde meer dan zeventig jaar alvorens dit project dat in feite door Gawehn en anderen rond 1925 was begonnen, volledig was afgerond.⁸

Merk op dat deze bewijsmethode een geheel andere is dan die boven werd geschetst voor de topologische karakterisering van \mathbb{S}^2

waarbij isomorfe triangulaties werden ‘nagebootst’.

Als je weet dat een zekere topologische ruimte X een variëteit is, dan is het niet altijd duidelijk welke variëteit het betreft. Denk maar aan het bekende in 1905 geformuleerde vermoeden van Poincaré: is elke compacte driedimensionale topologische variëteit (zonder rand) met triviale fundamentealgroep homeomorf met \mathbb{S}^3 ? Uiteraard wordt met \mathbb{S}^3 de verzameling

$$\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1\}$$

bedoeld. Het is de meeste wiskundigen bekend dat deze vraag pas in 2002 en 2003 werd opgelost door Perelman [30–32] en dat het hier gaat om een van de grootste wiskundige doorbraken ooit.

Irmgard Gawehn en haar omgeving

Beknopte levensloop tot 1928

Irmgard Gawehn wordt op 20 februari 1900 in Memel geboren.⁹ Memel is een Pruisische handelsstad die tegenwoordig Klaipėda heet en in Litouwen ligt. Haar vader is Hermann Gawehn, scheepsmakelaar, koopman en op een zeker moment ook de Spaanse consul te Memel. Vader en dochter wonen op het adres Breitestraße 13 in Memel. Irmgard Gawehn bezoekt daar tussen 1906 en 1916 het ‘Lyzeum’ en van 1916 tot 1920 het ‘Oberlyzeum’. Rond Pasen 1920 verwerft ze op dat Oberlyzeum het diploma onderwijzeres. Vervolgens doet ze aan de Oberrealschule in Königsberg, zo’n 200 km ten zuiden van Memel, aanvullende examens wiskunde, natuurkunde en schei-



Irmgard Gawehn in 1922



Breitestraße, Memel, rond 1915, waar de familie Gawehn op nummer 13 woont.

kunde. Daarna vertrekt ze naar Heidelberg waar ze voor het wintersemester 1920/21 een kamer vindt op het adres Leopoldstraße 57.

Later verhuist ze naar de Bergstraße 25. Vanaf het zomersemester 1920 loopt ze voornamelijk college bij de hoogleraren Becker, Curtius, Lenard, Liebmann, Perron, Pfeiffer en Rosenthal. Ze is ambitieus, want in het zomersemester van 1922 volgt ze colleges in Göttingen, op dat moment het centrum van wiskundige activiteit in de wereld. Na haar verblijf in Göttingen is haar adres Weberstraße 9 in Heidelberg. In de tweede helft van 1924 begint ze aan haar proefschrift. Dan woont ze in de Beethovenstraße op nummer 9.

Op 29 april 1925 is het proefschrift af. Ze levert de handgeschreven dissertatie getiteld *Über unberandete 2-dimensionale Mannigfaltigkeiten* in en ze is klaar voor de promotie. Helaas is dat manuscript verloren gegaan. Op 28 en 29 mei 1925 doet ze de mondelinge examens die onderdeel uitmaken van de verwerving van de doctorstitel. Ze doet wiskunde bij Rosenthal en Liebmann, filosofie bij Jaspers en chemie bij Curtius. Ze was eerst van plan natuurkunde naast chemie als bijvak op te nemen, maar ze voelt zich sterker in filosofie, schrijft ze op 9 mei 1925 als ze zoekt of ze natuurkunde door filosofie mag vervangen.¹⁰ Die mondelinge examens verlopen goed. Rosenthal beoordeelt haar kennis van de wiskunde als *zeer goed* en deels *uitstekend*. Liebmann beoordeelt de antwoorden op zijn vragen met *goed*. Haar kennis van filosofie wordt door de beroemde filosoof Karl Jaspers als *zeer goed* beoordeeld. Haar kennis van de scheikunde wordt door Curtius *volgende* en deels *goed* gevonden. De dissertatie wordt door Rosenthal beoordeeld. In zijn

‘Gutachten’ spreekt hij van ‘scherpzinnig en doelbewust denkwerk’. Hij adviseert vanzelfsprekend om de dissertatie te accepteren.

Met de dissertatie levert Gawehn ook een zogenaamde ‘Eidesstattliche Erklärung’ in waarin ze verklaart de dissertatie zonder ongeoorloofde hulp te hebben gemaakt. Dat laatste is nog steeds niet ongebruikelijk in Duitsland. De tekst luidt: Ik verklaar hierbij in plaats van een eed (an Eides statt) dat ik het voorliggende werkstuk, *Über unberandete 2-dimensionale Mannigfaltigkeiten*, zonder ongeoorloofde hulp heb vervaardigd.

Rosenthal heeft Gawehn ongetwijfeld geholpen met haar dissertatie. Een voetnoot bij het artikel in de *Annalen* in 1928 zegt: “Die Arbeit ist, auf Veranlassung und Unter Wertung mancher wertvollen Ratschläge von Herrn Prof. Rosenthal entstanden.” Een dergelijk dankwoord is niet ongevoelbaar bij een artikel dat gebaseerd is op een dissertatie. Het is opvallend dat ze de doctorsgraad officieel pas meer dan drie jaar later, op 30 januari 1931, verwerft. Dat is overigens een formali-

teit die waarschijnlijk wegens haar verblijf in Berlijn en later in Nederland is uitgesteld. Gawehn gaat in 1925 naar Berlijn voor verdere studie. Daar houdt ze zich met filosofie bezig [11, p. 568].

Opvallend is dat Gawehn over de studie wiskunde en de promotie in totaal zo’n vijf jaar doet. Vandaag de dag zou haar snelheid als spectaculair worden gezien. In die tijd kwam zo’n korte periode wel vaker voor, maar ook toen was het uitzonderlijk. Ze moet een briljante studente zijn geweest, niet voor niets schrijft Van Dalen [11, p. 568] dat aan het eind van haar studie Gawehns reputatie in Heidelberg legendarisch was. Gawehn is dan een jonge, briljante vrouw van 25 jaar die een veelbelovende toekomst tegemoet lijkt te gaan.

Irmgard Gawehn in Nederland

Brouwer krijgt vermoedelijk eind 1925 of begin 1926 als redactielid van de *Mathematische Annalen* de dissertatie van de 25-jarige Duitse promovenda Irmgard Gawehn uit Heidelberg toegestuurd. Op dat moment is Karl Menger (1902–1985) assistent bij hem. Brouwer beoordeelt zelf het manuscript maar laat Menger de correspondentie met betrekking tot de publicatie voeren.

Op 13 december 1926 schrijft Brouwer aan Heinz Hopf (1894–1971), die toen net in Berlijn Privatdozent geworden is en daar contact met Irmgard Gawehn heeft, dat hij op basis van het manuscript de conclusie trekt dat Fräulein Gawehn nog onvoldoende boven de stof staat. Ze maakt nog te gemakkelijk fouten. Brouwer heeft echter duidelijk belangstelling voor Gawehn, want hij stelt voor dat ze eerst in Duitsland haar ‘Staatsexamen’ en daarmee ook een onderwijsbevoegdheid voor gymnasium behaalt. Daarna zal ze bij hem in Amsterdam assistent kunnen worden.

Dan volgt een tegenslag voor Irmgard Ga-

Eidesstattliche Erklärung..
 Ich erkläre hiermit an Eides statt, daß ich die vorliegende Arbeit: „Über 2-dimensionale unberandete Mannigfaltigkeiten“ ohne unerlaubte Hilfe angefertigt habe.
 Irmgard Gawehn.

Figuur 1 De door Irmgard Gawehn in 1925 overlegde en ondertekende Eidesstattliche Erklärung.

wehn. Ze slaagt in 1927 niet voor het mondelinge staatsexamen. Volgens latere mededelingen van Freudenthal maakt Feigl deel uit van de commissie en weigert die haar te laten slagen.¹¹ Irmgard werkt in die periode aan een artikel over een filosofisch onderwerp. Op 9 april 1927 vraagt Brouwer Hopf in een brief om zich om Gawehn te bekommeren zodat het filosofische artikel weldra gedrukt kan worden [11, p. 568]. Het artikel is echter nooit verschenen en wat het onderwerp is weten we niet. Ondanks het niet behalen van het Staatsexamen wordt Irmgard Gawehn toch assistent bij Brouwer aan de Universiteit van Amsterdam.¹² Ze wordt op 1 januari 1928 aangesteld, maar ze arriveert vermoedelijk pas midden februari.¹³

Zij is op dat moment de tweede vrouwelijke assistent in de wiskunde aan een universiteit of hogeschool in Nederland.¹⁴ Het lijkt Gawehn voor de wind te gaan. Haar dissertatie verschijnt in de *Annalen* en ze verhuist naar Amsterdam, het Mekka van de topologie van die dagen. Niet alleen is Brouwer daar op het toppunt van zijn roem. Maar ook Witold Hurewicz (1904–1956), een van de grondleggers van de algebraïsche topologie, is van 1927 tot 1936 verbonden aan de Universiteit van Amsterdam, eerst als assistent van Brouwer en later als privatdocent. De andere daar aanwezige briljante topoloog is Menger, waar Brouwer het weldra mee aan de stok zou krijgen over de dimensietheorie; Menger zou Brouwer beschuldigen van geschiedvervalsing.¹⁵ Het is een spannende tijd waarin van alles gebeurt. Talloze topwetenschappers komen naar Amsterdam om met Brouwer over wiskunde te spreken. Alles rondom Brouwer zindert van de energie, spanningen en conflicten. Dit is prachtig beschreven in de boeken van Van Dalen [9, 11]. Zie ook Van Mill [27] voor een recente verhandeling over Brouwers dimensionsgrad.

Op 30 april 1928 schrijft Brouwer aan Eva Werneck dat Husserl, die op dat moment in Amsterdam is, Gawehn als de intelligentste persoon die hij in Nederland heeft ontmoet beschouwt [11, p. 567]. Volgens Van Dalen schrijft Husserl ook aan Heidegger dat Irmgard Gawehn grote indruk op hem heeft gemaakt [10, p. 325].

Gawehn blijft drie jaar lang tot 16 november 1930 aan als assistent van Brouwer. Ze wordt opgevolgd door Freudenthal. Gawehn gaat daarna terug naar Memel via Heidelberg, waar ze haar promotie formeel afrondt. In 1931 staat ze weer ingeschreven op haar oude adres in Memel bij haar vader.¹⁶ We vermoeden dat Hermann Gawehn rond 1932 over-

lijdt, want Irmgard besluit om terug te gaan naar Nederland en in 1935 is het huis Breitestraße 13 te Memel niet meer in het bezit van haar vader. Op 10 juni 1933 vestigt Irmgard Gawehn zich in Blaricum, de gemeente waar ook de familie Brouwer woonachtig is, op het adres Langeweg 6.¹⁷ Veelzeggend is dat ze bij de gemeente opgeeft geen beroep te hebben. Ze is de hoofdbewoner van het huis. Enige tijd verhuurt ze een kamer aan een onderhuurder, mejuffrouw W.J. Willard, een costumière uit Laren. Op 27 december 1938 wordt Irmgard Gawehn opgenomen in een psychiatrische inrichting. Haar persoonskaart vermeldt dat ze op die datum verhuist naar het adres Dolderscheweg 164 in Zeist. Dat is het adres van de Willem Arntz Hoeve in Den Dolder. Haar dossier is vernietigd en we zullen vermoedelijk nooit met zekerheid weten waarom ze wordt opgenomen.¹⁸

Het feit dat ze bijna veertig jaar tot aan haar dood in de inrichting zal verblijven wijst naar alle waarschijnlijkheid op een chronische psychiatrische ziekte. Op 29 april 1960 verhuist Irmgard Gawehn vanuit Den Dolder naar de Agnietenstraat 2 te Utrecht.¹⁹ Dat is het adres van het Willem Arntsz Huis, dat ook bij de Willem Arntsz Stichting hoorde en waar in die tijd voor een groot deel chronische en oudere patiënten verbleven. De verhuizing geeft aan dat men in 1960 de hoop op herstel definitief opgeeft, zo dat al niet eerder is gebeurd. Irmgard Gawehn verbleef in het Willem Arntsz-huis op open afdelingen en had de mogelijk-

heid om een wandelingetje buiten de deur te maken. “De professor in de wiskunde”, zoals sommigen haar noemden, was een vriendelijke maar gereserveerde, kwetsbare vrouw met een doorrookte stem en een onmiskenbaar Duits accent. De houding op de foto uit 1975 — het hoofd naar rechts gebogen en de linkerhand met gestrekte vingers naast het hoofd — is heel karakteristiek voor haar. De psychiaters die wij raadpleegden deelden ons mee dat dit soort typische lichaamshoudingen in de psychiatrie wel worden aangeduid met de term ‘maniërisme’ en dat komt met name voor bij chronische psychosen zoals schizofrenie. Irmgard Gawehn overlijdt op maandag 11 april 1977 na een verblijf van 39 jaar in een inrichting, meer dan de helft van haar leven.

Irmgard Gawehn volgens Hans Freudenthal

Op 25 juni 1926 geeft Gawehn in Berlijn haar eerste colloquiumvoordracht over het onderwerp van haar dissertatie. Freudenthal herinnert zich later dat de voordracht onbegrijpelijk was en Gawehn er niet in slaagde om duidelijk te maken waar het over gaat [11, p. 568]. Serieuzer is dat Gawehn in 1927 niet slaagt voor het mondelinge staatsexamen (zie boven).²⁰ Volgens Freudenthal stelde de examencommissie vragen over allerlei onderwerpen en kon zij de examinatoren niet overtuigen van haar wiskundige kennis [11, p. 520].

In Amsterdam gaat het volgens Freudenthal definitief mis. In een interview in de tachtiger jaren zegt hij het volgende: “Eind 1930



De boerderij midden op het schilderij bestond in de dertiger jaren uit drie huizen met de nummers Langeweg 4, 6 en 8 te Blaricum. Gawehn woonde in het middelste huis. Het huis heeft nu een rieten dak en omvat twee huizen met twee huisnummers: 6 en 8.



Foto: privéarchief

Irmgard Gawehn in 1975

was ik uit Berlijn naar Nederland gekomen als assistent naast Hurewicz bij Brouwer. Ik volgde daar Irmgard Gawehn op, over wie een heel boek te schrijven zou zijn — dat heb ik overigens gedaan, maar nooit gepubliceerd. Irmgard Gawehn was een bijzonder mooie vrouw die in Heidelberg bij Rosenthal een geniaal proefschrift had geschreven op het gebied van de topologie. Later dook zij op in filosofische kringen in Berlijn en had ook op dat terrein de naam geniaal te zijn. In Nederland bleek echter al gauw dat ze niets wist van wiskunde, noch van filosofie. Later heeft zij nog een rol gespeeld in het Larense Kunstenaarsmilieu, in de oorlog is ze in een krankzinnigen-gesticht gestorven. Een mogelijke verklaring is dat zij een abnormaal inlevingsvermogen had in de geest van de personen waar zij verliefd op werd — een wiskundige in Heidelberg en een filosoof in Berlijn.” [1, p. 118].

Tegen Van Dalen zei Freudenthal dat hij ooit met de promotor van Gawehn in Heidelberg, Arthur Rosenthal, heeft gesproken en dat die tegenover hem had toegegeven dat ze buitengewoon populair was bij de mannelijke studenten en dat een van hen de dissertatie had geschreven [11, p. 568]. Van Dalen vertelde ons dat Freudenthal ook de naam van de ware auteur van Rosenthal had gehoord, maar dat hij die naam niet prijs wilde geven.

Zich baserend op Freudenthal beschrijft Van Dalen [11, p. 506] dat Gawehn volgens ‘local gossip’ in een inrichting opgenomen wordt nadat haar laatste minnaar de relatie heeft verbroken. De vele relaties die ze voordien had, placht ze altijd zelf te verbreken. Volgens Freudenthal bezoeken Cor Jongejan, Brouwers secretaresse en vriendin en

Lize Brouwer, de vrouw van Brouwer, Irmgard Gawehn regelmatig in Den Dolder. Het contact met de familie Brouwer blijft dus in stand na haar opname, ondanks haar deplorabele toestand. We weten niet hoe lang dat duurt. Lize overlijdt in 1959 en Cor in 1968, twee jaar na de dood van Brouwer.

Arthur Rosenthal en de mystery topologist

Heeft Freudenthal gelijk?

Freudenthals uitspraken werpen plotseling een totaal ander licht op het leven van Irmgard Gawehn. Ze zou zich schuldig hebben gemaakt aan ernstig frauduleus handelen. Ze zou haar dissertatie door een ander hebben laten schrijven. Ze zou geen briljante wiskundige maar een briljante oplichtster zijn. En dat zou zo vast staan als een huis, want niemand minder dan haar eigen promotor zou dat hebben bevestigd. En waarom zouden we twijfelen aan het woord van Freudenthal? Dirk van Dalen deed dat niet — iets wat wij ons overigens kunnen voorstellen — en met de verschijning van de Nederlandse en de Engelstalige versie van de biografie van L.E.J. Brouwer zijn de verhalen van Freudenthal over Irmgard Gawehn onderdeel van de officiële geschiedschrijving betreffende Brouwer geworden. Toch roept het beeld dat Freudenthal van Gawehn schetst vragen op. Heeft Arthur Rosenthal zich laten oplichten of was hij misschien zelf betrokken bij de fraude? En zou hij dat echt zomaar in een gesprek met Freudenthal hebben toegegeven? En wie is dan de ware schrijver van de dissertatie? Levert de inhoud van het proefschrift op dit punt aanwijzingen? We nemen nu eerst de verhalen

van Freudenthal als uitgangspunt. Dat leidt tot een interessante zoektocht die echter geen feiten oplevert die de visie van Freudenthal ondersteunen.

Gawehns promotor Arthur Rosenthal

Wie is Rosenthal? Arthur Rosenthal (1887–1959) wordt in Neurenberg geboren, is de zoon van een zakenman en groeit op in München. Hij promoveert in 1909 op een proefschrift getiteld *Untersuchungen über gleichflächige Polyeder*. Hij werkt eerst in München en hij wordt in 1922 hoogleraar in Heidelberg. Dat betekent dat hij Gawehn pas leert kennen als ze uit Göttingen terugkomt. Rosenthal is van 1932–1933 decaan van de Faculteit der Wiskunde en Natuurwetenschappen in Heidelberg. Omdat hij een jood is, wordt hij in 1935 gedwongen met pensioen te gaan. Hij emigreert in 1939 naar Nederland. Er is in het Stadsarchief Amsterdam een ‘persoonskaart’ van hem en volgens die kaart wordt hij op 27 juli 1939 ingeschreven als ingezetene in Amsterdam. Hij woont daar op de Linnaeusparkweg in bij de familie Gazan. Op 2 maart 1940 verhuist hij volgens zijn persoonskaart naar Princeton. In de Verenigde Staten werkt hij aan de universiteiten van Michigan, New Mexico en Purdue. In 1954 krijgt hij eerherstel in Heidelberg. Rosenthal is een meetkundige, in het bijzonder bestudeert hij de classificatie van reguliere polyhedra en Hilberts axioma’s. Hij werkt ook in de analyse, de topologie, de ergodentheorie en de theorie van dynamische systemen. Hij heeft zeven PhD-studenten, waaronder Irmgard Gawehn. Hij sterft in 1959 in Lafayette (Indiana).

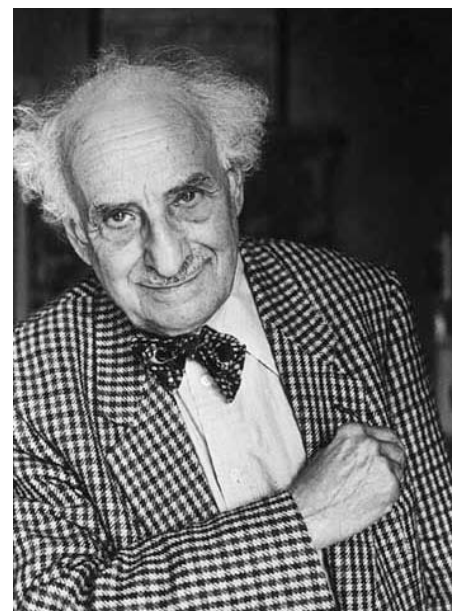


Foto: Werry Crane, Trouw (1987)

Hans Freudenthal (1905–1990)



Arthur Rosenthal (1887–1959)

Bestudering van Rosenthals werk brengt snel aan het licht dat zijn interesse uitgaat naar abstracte wiskunde. In 1940 publiceert hij het artikel ‘Verallgemeinerungen des Raumbegriffes’ in *Christiaan Huygens*, een Nederlands tijdschrift [36]. Dit artikel zou heel wel geschreven kunnen zijn in de tijd dat Rosenthal in Nederland verblijft. Het is een artikel over wat we vandaag de dag *algemene topologie* zouden noemen. Hij heeft het over metrische ruimten, Fréchetruimten, limieten van rijen, separabiliteit in metrische ruimten, hij bewijst de separabiliteit van de Hilbert-ruimte ℓ^2 , is bekend met de Urysohn-ruimte, definieert het eerste aftelbaarheidsaxioma, het tweede aftelbaarheidsaxioma, stelt de vraag naar de metrizeerbaarheid van topologische ruimten,²¹ en vraagt naar een topologische karakterisering van de euclidische ruimte \mathbb{R}^n en ruimten gemodelleerd daarover (vermoedelijk niet in het besef wat dat voor voeten in de aarde zou hebben. In dat laatste verband vermeldt hij het resultaat van zijn studente Irmgard Gawehn, haar prachtige topologische karakterisering van het boloppervlak. Rosenthal blijkt zeer wel ingevoerd te zijn in de algemene topologie en stelt formidabele problemen aan de orde, zoals de metrizeerbaarheid van algemene topologische ruimten en de topologische karakterisering van variëteiten. Ook blijkt hij trots te zijn op het werk van zijn studente Irmgard Gawehn.

Het Freudenthal-archief bevat enkele tientallen brieven die Freudenthal en Rosenthal

elkaar schreven in de periode van 29 maart 1940 tot 9 november 1954. De brieven hebben een vriendschappelijke toon, maar zijn formeel. De heren tutoyeren elkaar niet. Rosenthal moet een erg formele man geweest zijn. Jaap Korevaar heeft hem meegemaakt aan Purdue in de periode 1949–1951.²² Hij karakteriseert Rosenthal als een afstandelijke man die wat leek neer te kijken op de vele met onderwijstaken overladen gewone stafleden en niet deelnam aan de informele ‘parties’. Freudenthal en Rosenthal schrijven niet over wiskunde maar veeleer over het wel en wee van de families en het lot van collega-wiskundigen in die roerige tijden rond de Tweede Wereldoorlog. Acht kisten met boeken en andere bezittingen van Rosenthal blijken in Rotterdam achtergebleven te zijn en verbrandden in het bombardement van 1940. Na de oorlog stuurt Rosenthal pakketten met goederen die in Nederland schaars zijn. Op 17 november 1945 bedankt Freudenthal bijvoorbeeld voor een paar bretels dat hij uit de VS mocht ontvangen en waarvan hij onder de indruk is. Alles wijst erop dat Freudenthal en Rosenthal regelmatig contact hebben gehad in de periode tussen juli 1939 en maart 1940. Uit de briefwisseling blijkt bijvoorbeeld dat Rosenthal in december 1939 sinterklaas viert bij de Freudenthals op het adres Newtonstraat 75 in Amsterdam. De heren ontmoeten elkaar na het vertrek van Rosenthal naar de Verenigde Staten in 1940 pas weer op het International Congress of Mathematicians in Amsterdam in 1954. Het ligt voor de hand dat het gesprek tussen Freudenthal en Rosenthal over Gawehn in 1939 heeft plaatsgevonden. De opname van Gawehn in de inrichting was toen minder dan een jaar geleden. Gezien het formele karakter van de briefwisseling vraag je je af op welke manier ze over Gawehn hebben gesproken.

Gawehns proefschrift

Bij lezing van Gawehn [18], het artikel dat op haar proefschrift is gebaseerd, vallen een aantal zaken op. De inleiding is ‘zwaar’, met veel voetnoten met daarin historische beschouwingen die alles in perspectief plaatsen, en precies: de meeste belangrijke begrippen worden nauwkeurig omschreven. Moore [28] blijkt een belangrijk hulpresultaat te hebben bewezen.²³ Na de inleiding is de stijl compacter en wordt het complexe bewijs stap voor stap uitgewerkt. Het is een technisch zeer gecompliceerd bewijs dat meetkundig van aard is. Vandaag de dag zou het artikel van Gawehn tot de zogenaamde *meetkundige topologie* of de *continuümtheorie* worden gerekend. Dat is een andere tak van

sport dan de *algemene topologie* waar haar promotor Rosenthal zich toe voelde aange trokken. Zoals we al hebben opgemerkt in de vorige paragraaf, stoelt haar bewijs op de Stelling van Jordan en construeert zij steeds fijnere ‘isomorfe’ triangulaties van topologische ruimten. Het artikel eindigt met voorbeelden die laten zien dat bepaalde voorwaarden essentieel zijn. Hier is geen gering talent aan het woord, Freudenthal noemt het werk niet voor niets ‘geniaal’.

The mystery topologist

Het proefschrift van Gawehn is meer dan excellent en is technisch van zeer hoog niveau. Ook is het een bewijs van slechts één stelling, de topologische karakterisering van tweedimensionale variëteiten. Iemand heeft de kerngedachte geleverd en die is daarna bekwaam uitgewerkt. Als Gawehn hulp heeft gehad, van wie dan wel? In dit verband is Rosenthal zelf, gezien de aard van zijn werk, niet de eerste waar wij aan denken. Het profiel van de ideale kandidaat is dit. We zoeken een man die in de jaren 1924–1925 jong was en op de een of andere manier in die periode Gawehn gekend zou kunnen hebben. Verder moet hij een specialist zijn geweest, onder meer in wat we tegenwoordig de *meetkundige topologie* noemen. Daarnaast moet hij hebben beschikt over een uitzonderlijk talent, zodat hij moeiteloos Gawehn kon assisteren. Zoals we hebben gezien was het volgens Freudenthal een mannelijke student. De lijst van studenten aan de universiteit in Heidelberg in de jaren dat Irmgard Gawehn studeerde, voor zover we die hebben kunnen inzien, levert geen briljante topologen op. Als we het woord student ruim interpreteren zijn er wel enkele kandidaten te vinden. Het profiel past op Heinz Hopf (1894–1971). Hij was jong in die tijd, 30 jaar, en nog ongehuwd. Hij studeert een jaar in Heidelberg net voordat Gawehn daar arriveert. Zijn zus studeert daar dan ook. Hopf promoveert in 1925 in Berlijn, precies de plek waar Gawehn na haar promotie naartoe ging. Hij werkt in de meetkundige/algebraïsche topologie en had de begeleiding van Gawehn er makkelijk naast kunnen doen. Freudenthal promoveert bij Hopf. Dat zou kunnen verklaren waarom Freudenthal zijn naam niet wilde noemen. Hopf voldoet aan ons profiel, maar meer ook niet. Er is verder niets dat erop wijst dat zijn naam gevallen is in het gesprek tussen Rosenthal en Freudenthal. Gawehn studeert in 1922 een semester in Göttingen. Mogelijk heeft ze de man die haar later geholpen zou hebben daar ontmoet. Je kunt dan aan Hellmuth Kneser (1898–1973) denken. Ook jong in die tijd.

Hij kan Gawehn in 1922 in Göttingen eigenlijk niet gemist hebben. Hij had de kerngedachte en eventuele hulp bij de uitwerking van de dissertatie zeker kunnen leveren. Kneser promoveert in 1921 bij Hilbert en wordt in 1922 in Göttingen assistent en snel daarna privaattoecent. Kneser werkt in verschillende delen van de wiskunde en ook in de topologie. Ook bij hem kan men zich heel goed voorstellen dat hij Gawehn zou hebben kunnen helpen zonder zijn eigen werk te schaden. Kneser voldoet aan het profiel, maar ook in zijn geval is er verder niets dat erop wijst dat hij de gezochte briljante topoloog ook echt zou zijn. Hetzelfde geldt voor Reinhold Baer (1902–1979) die ook aan het profiel voldoet. Hij is jong. Baer blijft in 1922 in Göttingen en hij promoveert bij Kneser in 1925. Hij werkt in het goede gebied en hij heeft veel talent. Ook Baer had de begeleiding van de dissertatie van Gawehn er wel bij kunnen doen. We moeten constateren dat deze zoektocht niets oplevert. Ook als we meer in detail inzoomen op het topologisch werk van Hopf, Kneser of Baer vinden we niets dat wijst op een directe link met de dissertatie van Gawehn. De mystery topoloog is onvindbaar.

Freudenthals conclusies nader beschouwd

In de visie van Freudenthal wist Irmgard Gawehn niets of vrijwel niets van wiskunde, maar beschikte ze over toverkracht. In het gesprek met mannen slaagde ze er vele jaren lang telkens weer in om hen het gevoel te geven dat zij hen totaal begreep. De ene na de andere hooggeleerde examinator ging voor de bijl. De mystery topoloog deed haar zelfs een briljant stuk wiskunde cadeau. Deze mogelijkheid is uiterst intrigerend en van zijn standpunt uit gezien had Freudenthal groot gelijk toen hij Irmgard Gawehn als ideale hoofdpersoon van een roman beschouwde. Wij hebben deze mogelijkheid ook serieus genomen en in detail het leven van Irmgard Gawehn onder de loep genomen voor zover dat nog naspurbaar is. We hebben echter geen nieuwe feiten kunnen vinden die de visie van Freudenthal ondersteunen. In tegendeel, als we de levensloop van Irmgard Gawehn overwegen dan wordt het verhaal van Freudenthal alsmat onwaarschijnlijker.

Uit het bovenstaande is gebleken dat Irmgard Gawehn zeer goed functioneerde tot en met haar 25ste levensjaar. Er lijkt daarna een 'knik' in haar levenslijn te hebben plaatsgevonden, zoals psychiaters dat noemen. In de eerste periode van haar leven is zij flamboyant en talentvol, maar daarna gaat het snel bergafwaarts. Zij herstelt niet en er komt niets

meer uit haar vingers. Gezien de samenstelling van de populatie van langdurig verpleegden in de Willem Arntsz Hoeve in die tijd, is er een zeer grote kans dat zij aan schizofrenie leed. De karakteristieke pose op de foto uit 1975 wijst eveneens in die richting. Naar de mening van de psychiaters met ervaring op dit punt die wij raadpleegden, is dit een redelijke veronderstelling. De ziektegeschiedenis van Irmgard Gawehn lijkt er ook mee in overeenstemming. De verschijnselen van schizofrenie ontwikkelen zich geleidelijk. Voordat de verschijnselen van de aandoening ontstaan, ontwikkelen veel patiënten zich normaal. De ziekte openbaart zich bij mannen meestal voor het 25ste levensjaar, bij vrouwen gemiddeld vijf jaar later dan bij mannen (Hengeveld en Van Balkom [19, p. 225]).

Los van de precieze diagnose is het een feit dat Irmgard Gawehn 39 jaar — meer dan de helft van haar leven — in een inrichting heeft doorgebracht en dat een invaliderende psychiatrische ziekte daarvan de oorzaak moet zijn geweest. Het verhaal dat een verbroken relatie de oorzaak is van haar blijvende opname en dat volgens Freudenthal van Rosenthal afkomstig is,²⁴ moeten we van de hand wijzen.

Freudenthals verhaal bevat nog meer dubieuze details. Volgens Freudenthal, sprekend in of kort voor 1987, overleed Gawehn in de Tweede Wereldoorlog. Tegen Dirk van Dalen zei hij dat ze na de Tweede Wereldoorlog overleed. De eerste bewering is onwaar, de tweede is waar maar zegt niet veel: elke lezer van dit

stuk zal na de Tweede Wereldoorlog overlijden! Om precies te zijn, Irmgard Gawehn overleed in 1977. Verder zou zij volgens Freudenthal in de dertiger jaren in het kunstenaarsmilieu in het Gooi een rol hebben gespeeld. Volgens haar persoonskaart heeft ze van 10 juni 1933 tot 27 december 1938 in Blaricum gewoond. We hebben niets kunnen ontdekken over de rol die ze in die periode gespeeld zou hebben in het kunstenaarsmilieu aldaar. Lien Heyting, de auteur van een klassiek boek over dat milieu in de periode 1880–1920 [20] had nog nooit van Irmgard Gawehn gehoord toen wij haar raadpleegden.

Rosenthal, de promotor van Gawehn, heeft veel in Gawehn gezien. Zij slaagde in Heidelberg met glans voor haar examens, die zij toch geheel zelf heeft moeten afleggen. Gawehn moet een prima indruk hebben gemaakt op de vier examinatoren. Het is misschien voor een goede toneelspeelster mogelijk om één examinator voor de gek te houden, misschien zelfs twee, maar vier examinatoren uit vier verschillende vakgebieden een rad voor de ogen draaien is schier onmogelijk. Rosenthal was een behoorlijk wiskundige, die tot op hoge leeftijd actief is gebleven. Hij moet hebben geweten wat voor wiskundig vlees hij in de kuip had. Hij moet ook hebben geweten dat Gawehn naar Brouwer ging, de toptopoloog van die dagen. Als zij een toneelspeelster was, dan wist hij dat zijn reputatie daaronder zou gaan leiden. Het is dan ook vreemd dat hij haar heeft laten gaan, zonder Brouwer enigszins te informeren. In zijn artikel uit



Irmgard Gawehn, Bertus Brouwer, Dolly Kiehl, Willem Langhout en Tine Langhout-Vermeij

1940 verwijst Rosenthal op volstrekt natuurlijke wijze in positieve zin naar de dissertatie van Gawehn. Dit is helemaal in overeenstemming met wat hij tien jaar na de promotie van Gawehn in 1935 in een ‘Gutachten’ met betrekking tot een andere dissertatie schreef: “Meine Schülerin Irmgard Gawehn hatte in ihrer wertvollen Heidelberger Dissertation (erschieden in *d. Math. Ann.* 98, 1927) eine sehr durchsichtige Charakterisierung der 2-dimensionalen Mannigfaltigkeiten durch ausschliesslich innere topologische Eigenschaften gegeben, wobei die Forderung des Jordanschen Kurvensatzes im kleinen eine entscheidende Rolle spielt.”

In Heidelberg en Göttingen was Gawehn studente. Nadat ze in de luwte van Heidelberg was gepromoveerd kwam ze in Berlijn in de grote wereld terecht. Dat kan heel moeilijk zijn. Toen ze in Amsterdam arriveerde, werd ze geconfronteerd met Brouwer, met Menger en met Hurewicz, drie absolute geweldenaars. Niet weinigen met enig talent voor wiskunde zouden zich in de aanwezigheid van zoveel genialiteit gereduceerd hebben kunnen zien tot degenen die slechts secretariële werkzaamheden uitvoeren. Zo zou het ook Irmgard Gawehn kunnen zijn vergaan en in zo'n situatie helpen zich geleidelijk openbarende psychische problemen niet. En verder houdt Brouwer Gawehn drie jaar lang in dienst.¹⁵ Dat is toch wonderlijk als ze echt niets voorstelde. Dit laatste zou overigens ook een daad van menslievendheid hebben kunnen zijn, Brouwer had een sterk rechtvaardigheidsgevoel en hij zou een tamelijk hulpeloze assistente niet op straat zetten.

Freudenthal stelde dat Gawehn in Berlijn een volstrekt onbegrijpelijke voordracht hield. Dat zegt niet zoveel. Menig jong promovendus staat bol van de zenuwen bij het

presenteren van zijn of haar eerste resultaten. En er zijn talloze topwiskundigen die de kunst van het presenteren nooit onder de knie krijgen en tot op hoge leeftijd totaal onbegrijpelijke voordrachten houden. Het is aanmerkelijk het disfunctioneren van Gawehn in die periode te verklaren uit de zich toen al manifesterende psychische klachten in plaats van uit onkunde. Ook het niet slagen voor het mondelinge staatsexamen kan hieruit worden verklaard.

Wij kennen het geval van een wiskundige waarvan zijn promotor zegt dat hij een van de weinige echt grote talenten is geweest die bij hem promoveerden. Bij deze man is schizofrenie geconstateerd en hij heeft na zijn promotie geen wetenschappelijk werk meer verricht. De overeenkomst met het leven van Gawehn is frappant. Brilljante mensen aan wier carrière een vroegtijdig einde komt door ernstige psychische problemen bestaan echt. Men kan in dit verband ook aan John Nash (1928) denken, bij wie zich rond zijn dertigste schizofrenie openbaarde, waardoor hij tientallen jaren weinig of niets produceerde.

Tot slot nog enkele gedachten gewijd aan de mystery topoloog. Het is ondenkbaar dat Perelman de oplossing van het Poincaré-vermoeden zou hebben ‘weggegeven’ aan een promovendus; wiskundigen zijn wel goed maar niet gek. Elke wiskundige kan invoelen waarom Perelman vanuit principiële gronden de Fieldsmedaille heeft geweigerd en de prijs van één miljoen dollar van het Clay-instituut niet heeft geïncasseerd, alhoewel weinigen zijn voorbeeld zouden hebben gevolgd. Maar niemand had het kunnen begrijpen als hij de eer van de oplossing van het vermoeden van Poincaré aan een ander zou hebben gelaten.²⁵ Niet voor niets schreef Hugo Brandt Corstius, in de wiskunde afgestudeerd

als topoloog, in de wetenschapsbijlage van *NRC Handelsblad* van 25 januari 1996 het volgende: “Elke wiskundige is geniaal. Als hij niet geniaal meer is, moet hij wat anders gaan doen. Zo werd Alexander Rinnooy Kan bankier, Mient Jan Faber oorlogshitser, Paul Verhoeven filmer, Philip Glass componist, Hans Ree schaker en columnist, en trekt Frits Bolkestein stemmen door de kinderen van illegalen van school te sturen. Ze zullen in hun nieuwe bezigheden misschien ook geniaal zijn, maar ik weet zeker dat ze veel liever de Knoop van Rinnooy Kan, de Faber-lijn of de stelling van Verhoeven hadden uitgevonden en zo voor eeuwig beroemd zouden zijn geworden.”²⁶

Zou de topologische minnaar van Gawehn zo verliefd zijn geweest dat hij bereid was haar geheel de eer van een topresultaat te gunnen? Het lijkt erg onwaarschijnlijk.

Als je alles op een rij zet dan blijkt dat er naast de verklaringen van Freudenthal niets maar dan ook helemaal niets te vinden is dat de beschuldiging van fraude ondersteunt.

Kortom, Irmgard Gawehn was een briljante topologe. Zo moet zij de geschiedenis in gaan. ←

Dankbetuiging

De auteurs danken de volgende mensen en instellingen voor hun steun bij het schrijven van dit artikel: Renate Tobies, Walter Purkert, Ruediger Thiele, Lien Heyting, Gerard Bongers, Jaap Korevaar, Joost Vijselaar, Dirk van Dalen, Ineke Hilhorst, Rosemarie Huver, Mathisca de Gunst, Marijke Hilhorst, Karl Heinz Hoffman, Geertje van Mill, Josine van Mill, Dieter Remus, Astrid Oostveen, Liesbeth Sesink, Ruud Coenen, Alex de Ridder, Piet Eikelenboom, Willem van Tilburg, Joost Kievit, Wim Udo, Vera ten Broeke-Abels, Bea Koetsier, Fred Drissen, Stadsarchief Amsterdam, Universitätsarchiv Heidelberg, Historische Kring Blaricum, Streekarchief Gooi en Vechtstreek, Noord-Hollands Archief, Utrechts Archief.

Noten

- 1 Zie het interessante artikel ‘Frauderen is gemakkelijk en gebeurt overal’ van René Franssen in het *Nederlands Dagblad* van vrijdag 1 november 2013.
- 2 De *Cantor-verzameling* is de verzameling die je krijgt door uit het interval $[0, 1]$ het middelste derde interval weg te laten, dan uit de overblijvende twee intervallen de middelste derden en

ga zo maar door. Deze verzameling werd door Cantor [7] in 1883 geïntroduceerd als een compacte verzameling van Lebesgue-maat nul met dezelfde kardinaliteit als die van de reële getallen \mathbb{R} . Door intervallen weg te laten waarvan de som der lengten gelijk is aan $\varepsilon > 0$, krijg je een analoge structuur van Lebesgue-maat $1 - \varepsilon$.

- 3 Een punt x van een topologische ruimte X heet *geïsoleerd* als $\{x\}$ een open verzameling van X is.
- 4 Het gaat hier inderdaad om *topologische* dimensie. Er zijn tegenwoordig bijvoorbeeld in de dynamica vele verschillende dimensiebegrippen waaronder Hausdorff-dimensie. De standaard Cantor-verzameling heeft topologi-

- sche dimensie 0 en Hausdorff-dimensie $\log_3(2)$.
- 5 Een deelverzameling U van een topologische ruimte X heet *clopen* als U zowel open als gesloten is. Een topologische ruimte X heeft topologische dimensie 0 precies dan wanneer haar clopen verzamelingen de topologie genereren.
 - 6 Een *Peano-continuüm* is een lokaal samenhangend continuüm.
 - 7 Dranishnikov [15] en Edwards (zie Walsh [42]) losten gemotiveerd door deze vraag diepe en oude vragen op in de cohomologische dimensietheorie.
 - 8 We laten hier de ongeveer gelijktijdige ontwikkelingen voor *oneindig-dimensionale* variëteiten buiten beschouwing, zie Toruńczyk [39–40], Koetsier en van Mill [23] en Dijkstra, Levin en van Mill [14].
 - 9 In het Universitätsarchiv Heidelberg bevinden zich meerdere documenten die betrekking hebben op Gawehn. Er zijn twee ingevulde formulieren waarmee ze verzocht te worden ingeschreven. De eerste is gedateerd 3 mei 1920. De tweede is gedateerd 18 oktober 1922. Uit de tweede blijkt dat ze in de zomer van 1922 in Göttingen heeft gestudeerd en dus even uitgeschreven was. Ze studeerde dus twee keer twee jaar in Heidelberg en het archief heeft ook voor beide periodes een diploma (Abgangszeugnis) van Gawehn. Er zijn ook twee met die twee periodes corresponderende identiteitsbewijzen, waarvan de laatste van een foto is voorzien. Zie Figuur 1. Er is vervolgens het verzoek van Gawehn om toegelaten te worden tot de promotie en een verzoek van de decaan van de faculteit gedateerd 29 april 1925 om Gawehn tot het promotie-examen in de vakken wiskunde, natuurkunde en chemie toe te laten. Het woord natuurkunde is later doorgestreept en vervangen door filosofie. Dat verzoek ging vergezeld van een handgeschreven levensbeschrijving, die eveneens in het archief aanwezig is, en een handgeschreven dissertatie, die verloren is gegaan. Er is een handgeschreven verzoek van Gawehn, gedateerd 9 mei 1925, waarin zij verzoekt om het bijvak natuurkunde te vervangen door filosofie. Liebmann, die toen prodecaan was, schrijft erbij dat zoiets al vaker is voorgekomen en men vond het goed. De decaan stelt als promotietijdstip voor: vrijdag 29 mei 1925, om 6 uur. Plaats: Het Geologische Instituut, Hauptstraße 52. Op 25 mei krijgt Gawehn een uitnodiging van de decaan voor het examen. Die uitnodiging bevindt zich ook in het archief. Daarop staat dat het examen chemie al op 28 mei plaatsvindt en het tentamen filosofie op 29 mei om 5 uur op het adres Ploeck 66 te Heidelberg. Het valt op dat ze op 29 mei om 5 uur examen deed bij Jaspers en binnen een uur ook nog 600 meter moest lopen ten einde om 6 uur op tijd te zijn voor het examen wiskunde. Het oordeel van de examinatoren na die drie examens bevindt zich ook in het archief. In het archief is er ook een ongedateerde Eidesstattliche Erklärung van Gawehn. Zie Figuur 1. Tenslotte bevat het archief een 30 januari 1931 gedateerde bul, die verleend wordt op grond van het examen in 1925 en de gepubliceerde dissertatie. Het examen krijgt als ‘Gesamtnote’ ‘mit sehr gutem Erfolg’ en de dissertatie krijgt geen cijfer maar wordt beschreven als ‘ein Zeugnis wissenschaftlicher Bildung und ausgezeichneten Scharfsinnes’.
 - 10 Van Dalen [11, p. 520, voetnoot 87] vergist zich als hij stelt dat ze naast filosofie ook examen natuurkunde deed bij Lenard.
 - 11 Bron: e-mail aan de auteurs van Dirk van Dalen.
 - 12 In het archief van de Universiteit van Amsterdam dat zich in het Stadsarchief Amsterdam bevindt (onder nummer 1020), is er maar één document waarin de naam van Gawehn voorkomt. Dat bevindt zich in het onderarchief van de curatoren en is de lijst met assistenten van de hoogleraar Brouwer per jaar en met het inkomen erachter. Archief 279, nr. 375, Assistenten bij het Hooger Onderwijs van 1921/22 tot en met 1931/32. Het is een soort boekhouding. Curatoren betaalden de assistenten en er moest dus bijgehouden worden hoeveel en waaraan er werd besteed. De benoeming van assistenten was klaarblijkelijk geheel een zaak van de hoogleraar en waarvan hij niet eens in de vergadering van hoogleraren melding deed. In de handgeschreven notulen over 1922–1930 van die vergaderingen (van de Faculteit Wiskunde en Natuurwetenschappen) lijkt Gawehn nergens aan de orde te komen, terwijl Brouwer wel veel aan het woord is. In de 914de vergadering van de hoogleraren (3 februari 1937) van de faculteit wordt besloten dat voortaan hoogleraren moeten melden dat ze een andere conservator hebben aangesteld. Dat wordt vanaf dat moment in het faculteitsreglement opgenomen.
 - 13 Zie de brief van Brouwer aan Eva Wernecke van 15 februari 1928 [12].
 - 14 Aan de Technische Hogeschool Delft werd Johanna H.M. Manders (1892–1989) na haar afstuderen in de elektrotechniek in 1916 assistent bij Jan Arnold Schouten, zo’n tien jaar voordat Irmgard Gawehn aan de UvA werd aangesteld (Schongs [37] en Struik [38]). Johanna Manders promoveerde in 1919 bij Schouten en werkte tot aan haar pensionering in 1956 bij de Octrooiraad in den Haag. Tot 1945 was ze daarnaast verbonden aan de Technische Hogeschool Delft.
 - 15 Bron: Stadsarchief Amsterdam, Archief 279, nr. 375, Assistenten bij het Hooger Onderwijs van 1921/22 tot en met 1931/32. Gawehn kwam in dienst van de Universiteit van Amsterdam op 1 januari 1928 en werd op 16 november 1930 naadloos opgevolgd door Freudenthal. De andere assistenten bij Brouwer waren op dat moment Karl Menger, Witold Hurewicz (die er al langer was) en mejuffrouw Cor Jongejan (die er ook al langer was). Cor Jongejan was secretaresse en later vriendin, huisgenote en na de dood van de vrouw van Brouwer in feite diens levensgezel. Menger valt bij het academisch jaar 1928/29 af en tot 16 november 1930 zijn Hurewicz en Jongejans naast haar de andere assistenten. Menger, Hurewicz en Gawehn verdienen 3000 + 500 per jaar en Jongejan krijgt 1500 per jaar.
 - 16 Bron: <http://wiki-de.genealogy.net/Breite.Stra%C3%9Fe.in.Memel#Haus.Nr.13>.
 - 17 Bron: haar persoonskaart, Centraal Bureau voor Genealogie.
 - 18 Gezien het feit dat het om medische gegevens gaat en hier geheimhouding voor geldt, is het overigens de vraag of we toegang tot dat dossier zouden hebben gekregen. We hebben in het Utrechts Archief en in het Noord-Hollands Archief te Haarlem de archieven ingezien van de rechtbanken in Utrecht en in Amsterdam die in 1939 machtigingen verleenden om patiënten gedwongen in een psychiatrische inrichting op te nemen. We hebben daar geen Irmgard Gawehn betreffende machtiging gevonden. Dat is jammer omdat zulke machtigingen altijd een diagnose bevatten. Mogelijk is Gawehn vrijwillig opgenomen.
 - 19 Op 30 augustus 1973 verandert het adres van Irmgard Gawehn nog een laatste keer. Ze ‘verhuist’ naar de Vrouwjutenstraat 27. Dat betreft echter geen echte verhuizing; het adres verandert door de verplaatsing van de ingang van de inrichting.
 - 20 Dit is merkwaardig want, zoals werd opgemerkt in de vorige paragraaf, slaagde Gawehn met vlag en wimpel voor de examens in Heidelberg.
 - 21 Deze vraag werd onafhankelijk door Nagata, Smirnov en Bing opgelost. Zie Engelking [17] voor details.
 - 22 In de jaren 1945–1960 was er veel verloop bij de wiskunde aan Purdue University. Veel jonge mensen werden goedkoop ingehuurd, maar bleven niet lang. In Amerika ging het volgende gezegde toen rond: “Je bent geen wiskundige als je nooit aan Purdue geweest bent, maar je bent ook geen wiskundige als je er nog altijd bent!”. Aldus Jaap Korevaar.
 - 23 R.L. Moore (1882–1974) was een van de meest invloedrijke Amerikaanse wiskundigen uit de eerste helft van de twintigste eeuw. Wilder [46] merkt daar het volgende over op: *Whether this was due more to his famous teaching method (the ‘MOORE Method’) or to his creative work in mathematics is debatable; the current folklore seems to credit the former.*
 - 24 Bron: e-mail aan de auteurs van Dirk van Dalen.
 - 25 De eerlijkheid gebiedt te zeggen dat de auteurs zich hier enigszins door hun eigen verhaal laten meeslepen. De Stellingen van Gawehn en Perelman zijn namelijk van een geheel andere orde.
 - 26 De lezer dient deze satire niet al te serieus te nemen. Het is ook impliciete zelfspot; Hugo Brandt Corstius is van wiskundige tot columnist verworpen.

Referenties

- 1 G. Alberts, F. van der Blij en J. Nuis, eds., *Zij mogen uiteraard daarbij de zuivere wiskunde niet verwaarloozen*, CWI, 1987.
- 2 R.H. Bing, The Kline sphere characterization problem, *Bull. Amer. Math. Soc.* 52 (1946), 644–653.
- 3 R.H. Bing, A homeomorphism between the 3-sphere and the sum of two solid horned spheres, *Annals of Math.* 56 (1952), 354–362.
- 4 R.H. Bing, *The Geometric Topology of 3-Manifolds*, American Mathematical Society Colloquium Publications, Vol. 40, American Mathematical Society, Providence, RI, 1983.
- 5 L.E.J. Brouwer, On the structure of perfect sets of points, *Proc. Akad. Amsterdam* 12 (1910), 785–794.
- 6 J. Bryant, S. Ferry, W. Mio en S. Weinberger, Topology of homology manifolds, *Ann. of Math.* (2) 143 (1996), 435–467.
- 7 G. Cantor, Über unendliche, lineare Punktmanichfaltigkeiten, *Math. Ann.* 21 (1883), 545–591.
- 8 S. Claytor, Topological immersion of Peanian continua in a spherical surface, *Ann. of Math.* (2) 35 (1934), 809–835.
- 9 D. van Dalen, *Mystic, Geometer, and Intuitionist – The life of L.E.J. Brouwer. Vol. 1, The Dawning Revolution*, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1999.
- 10 D. van Dalen, *L.E.J. Brouwer, een biografie*, Bert Bakker, Amsterdam, 2001.
- 11 D. van Dalen, *Mystic, Geometer, and Intuitionist – The life of L.E.J. Brouwer, 1881–1966. Vol. 2, Hope and Disillusion*, The Clarendon Press, Oxford University Press, Oxford, 2005.
- 12 D. van Dalen, ed., *Companion to the Selected Correspondence of L.E.J. Brouwer*, Springer, 2011.
- 13 R.J. Daverman, *Decompositions of Manifolds*, Academic Press, New York, 1986.
- 14 J.J. Dijkstra, M. Levin en J. van Mill, *A Short Proof of Toruńczyk’s Characterization Theorems*, preprint, 2013.
- 15 A.N. Dranišnikov, On a problem of P.S. Alexandrov, *Matem. Sbornik* 135 (1988), 551–557.
- 16 R.D. Edwards, The topology of manifolds and cell-like maps, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Helsinki, 1978)*, Acad. Sci. Fennica, Helsinki, pp. 111–127.
- 17 R. Engelking, *General Topology*, Heldermann, Berlin, 2nd ed., 1989.
- 18 I. Gawehn, Über unberandete 2-dimensionale Mannigfaltigkeiten, *Math. Ann.* 98 (1928), 321–354.
- 19 M.W. Hengeveld en A.J.L.M. van Balkom, eds., *Leerboek psychiatrie*, De Tijdstroom, Utrecht, 2005.
- 20 L. Heyting, *De wereld in een dorp, schilders, schrijvers en wereldverbeteraars in Laren en Blaricum, 1880–1920*, Meulenhoff, Amsterdam, 1994.
- 21 C. Jordan, *Cours d’analyse, Vol. 1*, Gauthier-Villars, Paris, 1893.
- 22 E.R. van Kampen, On some characterizations of 2-dimensional manifolds, *Duke Math. J.* 1 (1935), 74–93.
- 23 T. Koetsier en J. van Mill, By their fruits ye shall know them: some remarks on the interaction of general topology with other areas of mathematics, in *History of Topology*, I. M. James, ed., North-Holland, Amsterdam, 1999, pp. 199–239.
- 24 K. Kuratowski, Une caractérisation topologique de la surface de la sphère, *Fund. Math.* 13 (1929), 307–318.
- 25 K. Kuratowski, *Topology II*, Academic Press, New York, 1968.
- 26 J. van Mill, *The Infinite-Dimensional Topology of Function Spaces*, North-Holland, Amsterdam, 2001.
- 27 J. van Mill, Brouwers dimensionsgrad: controverse en verwarring, *Nieuw Archief voor Wiskunde* 5/14 (2013), 130–138.
- 28 R.L. Moore, On the foundations of plane analysis situs, *Trans. Amer. Math. Soc.* 17 (1916), 131–164.
- 29 R.L. Moore, Concerning simple continuous curves, *Trans. Amer. Math. Soc.* 21 (1920), 333–347.
- 30 G. Perelman, Finite extinction time for the solutions to the Ricci flow on certain three-manifolds, arXiv DG 0307245, 2003.
- 31 G. Perelman, Ricci flow with surgery on three-manifolds, arXiv DG 0303109, 2003.
- 32 G. Perelman, The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications, arXiv DG 0211159, 2002.
- 33 F. Quinn, Resolutions of homology manifolds, and the topological characterization of manifolds, *Invent. Math.* 72 (1983), 267–284.
- 34 F. Quinn, An obstruction to the resolution of homology manifolds, *Michigan Math. J.* 34 (1987), 285–291.
- 35 J.H. Roberts, A point set characterization of closed 2-dimensional manifolds, *Fund. Math.* 18 (1932), 182–193.
- 36 A. Rosenthal, Verallgemeinerungen des Raumbegriffes, *Chr. Huygens* 18 (1940), 234–250.
- 37 W.W. Schongs, Johanna Manders, electrotechnisch ingenieur (1892–1989): in het spoor van Aletta Jacobs, *De ingenieur* 107 (1995), 34–36.
- 38 D.J. Struik, Levensbericht van Jan Arnoldus Schouten (28 augustus 1883 – 20 januari 1971), *Jaarboek Ned. Akad. Wetenschappen* (1971), 94–100.
- 39 H. Toruńczyk, On CE-images of the Hilbert cube and characterizations of Q-manifolds, *Fund. Math.* 106 (1980), 31–40.
- 40 H. Toruńczyk, Characterizing Hilbert space topology, *Fund. Math.* 111 (1981), 247–262.
- 41 O. Veblen, Theory of plane curves in nonmetrical analysis situs, *Trans. Amer. Math. Soc.* 6 (1905), 83–98.
- 42 J.J. Walsh, Dimension, cohomological dimension and cell-like mappings, *Shape Theory and Geometric Topology Conference, Dubrovnik, Lecture Notes in Mathematics* 870, (S. Mardešić and J. Segal, eds.), Springer, Berlin, 1981, pp. 105–118.
- 43 A.J. Ward, The topological characterisation of an open linear interval, *Proc. London Math. Soc.* 41 (1936), 191–198.
- 44 R.L. Wilder, A converse of the Jordan-Brouwer separation theorem in three dimensions, *Trans. Amer. Math. Soc.* 32 (1930), 632–657.
- 45 R.L. Wilder, *Topology of Manifolds*, American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 32, American Mathematical Society, New York, 1949.
- 46 R.L. Wilder, The mathematical work of R.L. Moore: its background, nature and influence, *Arch. Hist. Exact Sci.* 26 (1982), 73–97.
- 47 G.S. Young, Jr., Spaces in which every arc has two sides, *Ann. of Math.* (2) 46 (1945), 182–193.
- 48 L. Zippin, A study of continuous curves and their relation to the Janiszewski-Mullikin theorem, *Trans. Amer. Math. Soc.* 31 (1929), 744–770.