

VU Research Portal

The Kac-Ward approach to the Ising Model

Lis, M.

2014

document version

Publisher's PDF, also known as Version of record

[Link to publication in VU Research Portal](#)

citation for published version (APA)

Lis, M. (2014). *The Kac-Ward approach to the Ising Model*.

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal ?

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

E-mail address:

vuresearchportal.ub@vu.nl

Samenvatting

Het Isingmodel is een van de fundamentele modellen uit de statistische fysica. Het model is geïntroduceerd als een model voor spontane magnetisatie in ferromagneten. Ising [35] bewees dat dit fenomeen niet optreedt in het eendimensionale geval en beweerde dat hetzelfde moet gelden in hogere dimensies. Deze bewering is later weerlegd door Peierls [48], die voor dimensies hoger dan één vaststelde dat het Isingmodel spontane magnetisatie vertoont bij lage temperaturen. Het kritieke punt, d.w.z. de temperatuur waarbij de faseovergang plaatsvindt, werd voor het Isingmodel op het vierkantsrooster voor het eerst door Kramers en Wannier [41] geïdentificeerd als het dekpunt van een zekere dualiteitstransformatie. Het eerste rigoureuze bewijs dat het zelf-duale punt kritiek is werd gegeven door Onsager [47], die de vrije-energiedichtheid van het model expliciet uitrekende.

Op zoek naar een eenvoudiger oplossing dan Onsagers ingewikkelde algebraïsche methode, stelden Kac en Ward [36] een combinatorische aanpak voor, waarin de partitiefunctie van het Isingmodel wordt gegeven door de determinant van een zekere meetkundig gedefinieerde operator (de Kac-Ward operator). Echter, de aanpak van Kac en Ward was niet rigoureuze, en een belangrijke aanname bleek later incorrect. De eerste volledig rigoureuze verantwoording van de methode van Kac-Ward is pas veel later gegeven door Dolbilin et al. [21].

In dit proefschrift werpen we een nieuwe blik op de aanpak van Kac en Ward. In hoofdstuk 2, dat gebaseerd is op gezamenlijk werk met Wouter Kager en Ronald Meester [38], kijken we naar de combinatorische details van de methode en volgen daartoe de stappen van Vdovichenko [55]. De nadruk ligt op de ontwikkeling van de determinant van de Kac-Ward operator in termen van lussen. We geven nieuwe uitdrukkingen voor de correlatiefuncties en de vrije-energiedichtheid van het Isingmodel in termen van lussen met zowel positieve als negatieve gewichten. Door het spectrum van de Kac-Ward operator te analyseren vinden we een optimale grens voor de groeisnelheid van de lussen met teken op het vierkantsrooster. Hiermee zijn we in staat een nieuw bewijs te geven van het feit dat het zelf-duale punt van Kramers en Wannier kritiek is. We laten ook zien hoe Onsagers uitdrukking voor de vrije-energiedichtheid afgeleid kan worden. In hoofdstuk 3 breiden we de methodes van hoofdstuk 2 uit naar meerpuntsrelatiefuncties en correlatiefuncties met andere randvoorwaarden. Als bi-product vinden we een uitdrukking voor de meerpuntsrelaties op de rand in termen

van de tweepuntsfuncties. Zodoende leiden we een resultaat van Boel, Groeneveld en Kasteleyn [7] opnieuw af.

In hoofdstuk 4, dat gebaseerd is op het artikel [45], laten we zien hoe de methode van Kac-Ward kan worden gebruikt om grenzen te verkrijgen voor de kritieke temperatuur van het Isingmodel gedefinieerd op algemene planaire grafen. We vinden een grens voor de eigenwaarden van de Kac-Ward operator die ons in staat stelt om gebieden in het complexe vlak te identificeren waar de limieten van de vrije-energiedichtheid analytische functies zijn van de inverse van de temperatuur. De grens blijkt optimaal te zijn voor isoradiale grafen, d.w.z. dat de grens laat zien dat de zelf-duale Z -invariante koppingsconstanten van Baxter [4] kritiek zien. De klasse van zelf-duale Z -invariante Isingmodellen bevat bijvoorbeeld de kritieke homogene modellen op het vierkante, driehoekige en zeshoekige rooster. Naar ons beste weten is ons resultaat het eerste van deze soort dat ook geldt voor aperiodieke grafen.

Tenslotte wijzen we in hoofdstuk 5, dat is gebaseerd op het artikel [44], een verband aan tussen de methode van Kac-Ward en de recente discrete holomorfe aanpak van Smirnov et al. [13, 14, 32, 34, 53]. We laten zien dat de kritieke Kac-Ward operator op isoradiale grafen zich in zekere zin gedraagt als de operator van s -holomorfiteit. Deze eigenschap van sterke discrete holomorfiteit staat centraal in de discrete holomorfe aanpak van het Isingmodel. Daarnaast bewijzen we dat de inverse Kac-Ward operator geïdentificeerd kan worden met de Greense functie van een discreet Riemann-Hilbert randwaardeprobleem. Verder gebruiken we resultaten uit hoofdstuk 4 om een algemeen beeld te schetsen van de niet-terugtrekkende-wandelingrepresentatie van de kritieke inverse Kac-Ward operator op isoradiale grafen. Als gevolg hiervan lijkt de oplossing van het discrete Riemann-Hilbert randwaardeprobleem op de representatie in termen van stochastische wandelingen van de oplossing van het discrete Dirichlet randwaardeprobleem voor harmonische functies. Het belangrijke verschil is dat niet-terugtrekkende wandelingen complexe gewichten hebben die geen kansmaat opleveren op de ruimte van wandelingen.