Morse-Conley-Floer Homology

Rot, T.O.

2014

Nederlandse samenvatting: Morse-Conley-Floer homologie

FORMULE

Schrandere opmerking:
'$E = mc^2$'
Ja, Albert Einstein -
Die kende zijn vak

En zijn betoog was heel
Argumentatierijk
(Blijft achterwege
Voor het gemak)

Marjolein Kool & Drs. P [KD 9]

Overzicht

In dit proefschrift worden twee ogenschouwelijk onafhankelijke problemen bestudeerd. De samenhang tussen de onderwerpen is Morse theorie. In Deel I wordt een nieuwe homologietheorie ontwikkeld voor stromingen op eindigdimensionale variëteiten, en in Deel II wordt de existentie van periodieke banen op niet-compact energie hyperoppervlakken onderzocht.

We gaan nu wat dieper in op de resultaten.

Deel I: Morse-Conley-Floer homologie

Een *stroming* is een afbeelding $\phi : \mathbb{R} \times M \to M$ zodat $\phi(t, \phi(s, x)) = \phi(t + s, x)$ en $\phi(x, 0) = x$ voor alle $x \in M$ en $t, s \in \mathbb{R}$. Stromingen komen natuurlijk voor: Onder milde technische voorwaarden zijn dit precies de oplossingen van de autonome differentiaalvergelijkingen $x' = X(x)$ voor vectorvelden X. Een belangrijk studieobject van stromingen zijn de *invariante verzamelingen*. Dit zijn verzamelingen $S \subset M$ zodat $\phi(S, t) = S$ voor alle $t \in \mathbb{R}$. Voorbeelden van zulke verzamelingen zijn bijvoorbeeld evenwichten, periodieke banen en (chaotische) attractoren.

In dit proefschrift wordt een homologietheorie –Morse-Conley-Floer homologie– ontwikkeld voor *geïsoleerde* invariante verzamelingen. Dit zijn invariante verzamelingen die gevangen worden in omgevingen die geen grotere invariante verzamelingen bevatten. Een geïsoleerde invariante verzameling laat altijd een *Lyapunov functie* toe. Zo'n functie daalt langs de oplossingen buiten de invariante verzameling. De Morse-Conley-Floer homologie is grofweg gedefinieerd als de *Morse* homologie van een kleine verstoring van een Lyapunov functie.

Een hoofdresultaat van dit proefschrift, beschreven in Hoofdstuk 2, is dat dit een goede definitie is. Het hangt –op uniek isomorfisme na– niet af van de keuzes die gemaakt zijn om de Morse-Conley-Floer homologie te definieren. De homologie is verder stabiel in de zin dat het invariant is onder continuaties. Deze stabiliteit kan gebruikt worden om de homologie uit te rekenen in niet-triviale situaties.

In Hoofdstuk 3 beschrijven we de functoriële eigenschappen van de homologie theorie. Natuurlijke afbeeldingen tussen vari´eteiten met stromingen zijn de zogenaamde equivariante afbeeldingen. Deze afbeeldingen verstrengelen de beide stromingen en induceren afbeeldingen in Morse-Conley-Floer homologie. Dit kan gebruikt worden om formele berekeningen te doen over het mogelijke bestaan van bepaalde stromingen, equivariante afbeeldingen en geïsoleerde invariante verzamelingen.

Stromingen die in dit proefschrift worden bestudeerd zijn reversibel. In Hoofdstuk 4 wordt een belangrijk gevolg van deze reversibilteit bestudeerd. De Morse-Conley-Floer homologie van een geisoleerde invariante verzameling is isomorf aan de Morse-Conley-Floer cohomologie van de terugwaardse stroming.

In Hoofdstuk 5 bestuderen we gedegenereerde *gradient-systemen* en *Morse decomposities* van algemene stromingen. Het hoofdresultaat is hier het bestaan van een *spectraalrij* wat een relatie geeft tussen Morse-Conley-Floer homologie van de geïsoleerde invariante verzamelingen en de globale homologie van de onderliggende ruimte.

Deel II: Periodieke banen op niet compacte hyperoppervlakken

In Deel II behandelen we de existentie van periodieke banen voor een klasse van Hamiltoniaanse dynamische systemen. Hamiltoniaanse systemen beschrijven klassieke mechanische bewegingen zonder wrijving. De zoektocht naar het bestaan van zulke periodieke oplossingen is een drijfveer in het onderzoek in de symplectische en contact meetkunde. Bijna alle resultaten die behaald zijn gaan over systemen waar de energieoppervlakken begrensd (compact) zijn. In Hoofdstuk 6 vinden we een klasse van Hamiltoniaanse systemen waar de energie oppervlakken niet compact hoeven te zijn, maar waar er toch altijd een periodieke baan aanwezig is. De methode die gebruikt wordt om het bestaan van een periodieke baan aan te tonen is klassiek. Het probleem wordt geformuleerd als een vraag naar de existentie van kritieke punten van de Lagrangiaanse actiefunctionaal op de lussenruimte van de onderliggende ruimte. Dat deze functionaal niet triviale kritieke punten heeft wordt bewezen met behulp van een verstrengelings methode. In de lussenruimte worden verzamelingen gevonden die verstrengeld zijn, en waar de functionaal een bepaald gedrag vertoont. Dit forceert kritieke punten van de functionaal, en daarmee de existentie van periodieke banen op het gegegeven energieoppervlak.