

# VU Research Portal

## Measure-Valued Differentiation for Finite Products of Measures

Leahu, H.

2008

### **document version**

Publisher's PDF, also known as Version of record

[Link to publication in VU Research Portal](#)

### **citation for published version (APA)**

Leahu, H. (2008). *Measure-Valued Differentiation for Finite Products of Measures: Theory and Applications*. [PhD-Thesis - Research and graduation internal, Vrije Universiteit Amsterdam].

### **General rights**

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal

### **Take down policy**

If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

### **E-mail address:**

[vuresearchportal.ub@vu.nl](mailto:vuresearchportal.ub@vu.nl)

*MAATWAARDIGE DIFFERENTIATIE VOOR EINDIGE PRODUCTMATEN:  
THEORIE EN TOEPASSINGEN*

In dit proefschrift wordt een theorie van zwakke differentiatie van kansverdelingen gepresenteerd. De fundamentele observatie is dat de zwakke afgeleide van een kansverdeling  $\mu_\theta$ , die afhankelijk is van een parameter  $\theta$ , kan herschreven worden als het gescaleerd verschil tussen twee kansverdelingen. Dit feit leidt naar nuttige representaties van de afgeleide  $\frac{d}{d\theta}\mathbb{E}_\theta[g(X)]$  van de gemiddelde waarde  $\mathbb{E}_\theta[g(X)]$ , voor iedere  $g$  uit een vooraf gedefinieerd onderverdeling  $\mathcal{D}$  van kostenfuncties, waarbij  $X$  is een stochastische variabele met kansverdeling  $\mu_\theta$ .

Veel wiskundige modellen zijn beschreven door een eindige verzameling van onafhankelijk stochastische variabelen en dit is de reden waarom zwakke afgeleiden van producten van kansverdelingen in dit proefschrift onderzocht worden. Voor de opbouw van de theorie zijn resultaten uit de maattheorie en de functionaal analyse nodig. Deze worden dan ook in Hoofdstuk 1 voorgesteld.

Hoofdstuk 2 behandelt eerste-orde zwakke differentiatie. Hoofresultaten zoals de productregel voor zwakke differentiatie en de representatiestelling van het zwakke afgeleiden van productmaten worden aangetoond. Een productregel voor zwakke differentiatie van kansverdelingen was verondersteld (zonder bewijs) in [48]. Twee voorbeelden van gradiënt schatters beëindigen dit hoofdstuk.

In Hoofdstuk 3 laten we zien hoe de theorie van de differentiatie van kansverdelingen kan worden toegepast om bovengrenzen voor storings van parameter-afhankelijke stochastische modellen te berekenen. Bijzondere aandacht wordt besteed aan de wachttijden van het G/G/1 wachtrijsysteem. Het hoofresultaat van dit hoofdstuk laat zien dat zwakke differentieerbaarheid van de bedientijden, “sterke stabiliteit” van de stationaire kansverdeling van de wachttijden geeft, met betrekking tot een bepaalde klasse van sub-exponentiële kostenfuncties.

In Hoofdstuk 4 breiden wij onze analyse uit naar hogere-orde differentiatie en een zwakke differentiaalrekening voor maatwaardige functies wordt voorgesteld. Een onderzoek op het gebied van Taylor-reeks ontwikkelingen gebaseerd op zwakke afgeleiden wordt ook uitgevoerd.

Afsluitend passen wij in Hoofdstuk 5 de resultaten uit Hoofdstuk 4 toe op discrete-tijd systemen die kunnen worden beschreven door een matrix-vector vermenigvuldiging in een aantal algemene, niet-conventionele algebras (bv. max-plus of min-plus algebra). Een belangrijk resultaat is dat voor sommige klassen van polynomiaal begrensde kostenfuncties zwakke differentieerbaarheid van twee stochastische matrices  $X_\theta$  en  $Y_\theta$  de zwakke differentieerbaarheid van het algemeen product  $X_\theta \odot Y_\theta$  impliceert. Dit feit laat ons toe om een zwakke differentiaalrekening voor stochastische matrices te ontwikkelen.