VU Research Portal

Relaxed commutant lifting and Nehari interpolation

ter Horst, S.

2007

document version
Publisher's PDF, also known as Version of record

Link to publication in VU Research Portal

citation for published version (APA)
ter Horst, S. (2007). *Relaxed commutant lifting and Nehari interpolation*.

General rights
Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal ?

Take down policy
If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

E-mail address:
vuresearchportal.ub@vu.nl

Download date: 27. Oct. 2021

Samenvatting

Een "verlichte" versie van de methode van het optillen van de commutant met toepassingen voor het interpolatieprobleem van Nehari

De methode van het optillen van de commutant (in het Engels: de commutant lifting method en daarom afgekort als de CL-methode) is een algemene methode voor het construeren van oplossingen voor metrisch begrensde interpolatieproblemen zoals die van Schur, Nevanlinna-Pick en Nehari. Een "verlichte" versie van deze methode, die in het Engels bekend is onder de naam relaxed commutant lifting method en die we daarom de RCL-methode noemen, werd in het begin van deze eeuw geïntroduceerd. Behalve voor de eerder genoemde interpolatieproblemen kan de RCL-methode ook gebruikt worden om oplossingen voor getrunkeerde versies van deze interpolatieproblemen te construeren. Een dataset voor de RCL-methode bestaat uit vijf operatoren. Wanneer zo een dataset gegeven is, dan beschrijft de RCL-methode zogenoemde contractieve interpolanten. Op het niveau van de interpolatieproblemen komen deze contractieve interpolanten overeen met de oplossingen (de interpolanten). In het artikel waar de RCL-methode geïntroduceerd werd, werd een specifieke contractieve interpolant geconstrueerd, die bekend staat als de centrale contractieve interpolant. De vraag naar een beschrijving van alle contractieve interpolanten bleef open. Deze vraag was het beginpunt van het onderzoek dat heeft geleid tot deze dissertatie.

Het beschrijven van alle contractieve interpolanten voor de RCL-methode blijkt overeen te komen met het beschrijven van alle oplossingen van een abstract interpolatieprobleem. De oplossingen voor dit interpolatieprobleem zijn analytische operatorwaardige functies op de eenheidsschijf $\mathbb{D}$ van het complexe vlak $\mathbb{C}$. Om precies te zijn, veronderstel dat twee Hilbertruimten $\mathcal{U}$ en $\mathcal{Y}$ gegeven zijn. We schrijven $\mathbf{H}^2(\mathcal{U},\mathcal{Y})$ voor de verzameling van analytische functies H op $\mathbb{D}$ waarvan de waarden operatoren van $\mathcal{U}$ naar $\mathcal{Y}$ zijn, zo dat de formule

$$(\Gamma u)(\lambda) = H(\lambda)u \quad (u \in \mathcal{U}, \lambda \in \mathbb{D}) \tag{1}$$

een operator van $\mathcal{U}$ naar de Hardyruimte $H^2(\mathcal{Y})$ definieert. De verzameling $\mathbf{H}^2(\mathcal{U},\mathcal{Y})$ is een Banachruimte onder de norm $\|H\| := \|\Gamma\|$, waar $\|\Gamma\|$ de norm van de operator Γ in (1) is. De eenheidsbol in de Banachruimte $\mathbf{H}^2(\mathcal{U},\mathcal{Y})$ wordt aangeduid met $\mathbf{H}^2_{\mathrm{ball}}(\mathcal{U},\mathcal{Y})$. Het abstracte interpolatieprobleem kan nu als volgt worden geformuleerd: Gegeven twee Hilbertruimten $\mathcal{U}$ en $\mathcal{Y}$, een deelruimte $\mathcal{F}$ van $\mathcal{U}$ en een contractie

$$\omega = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix} : \mathcal{F} \to \begin{bmatrix} \mathcal{Y} \\ \mathcal{U} \end{bmatrix}, \tag{2}$$

beschrijf alle functies H in $\mathbf{H}^2_{\text{ball}}(\mathcal{U},\mathcal{Y})$ zo dat

$$\omega_1 + \lambda H(\lambda)\omega_2 = H(\lambda)|_{\mathcal{F}} \quad (\lambda \in \mathbb{D}). \tag{3}$$

Het is nuttig om eerst de functies in $\mathbf{H}^2_{\text{ball}}(\mathcal{U},\mathcal{Y})$ te beschrijven. In deze dissertatie geven we een beschrijving van deze functies uitgedrukt in de functies van de Schurklasse $\mathbf{S}(\mathcal{U},\mathcal{Y}\oplus\mathcal{U})$. Een functie Z op $\mathbb{D}$ is een Schurklasse-functie waneer Z analytisch is op $\mathbb{D}$ en de waarden van Z contractieve operatoren zijn. Het symbool $\mathbf{S}(\mathcal{U},\mathcal{Y}\oplus\mathcal{U})$ staat voor de verzameling van alle Schurklasse-functies waarvan de waarden operatoren van $\mathcal{U}$ naar $\mathcal{Y}\oplus\mathcal{U}$ zijn. De beschrijving van de functies in $\mathbf{H}^2_{\text{ball}}(\mathcal{U},\mathcal{Y})$ is als volgt: Voor elke functie H in $\mathbf{H}^2_{\text{ball}}(\mathcal{U},\mathcal{Y})$ bestaat er een functie Z in de Schurklasse $\mathbf{S}(\mathcal{U},\mathcal{Y}\oplus\mathcal{U})$ zo dat

$$H(\lambda) = \Pi_{\mathcal{U}}Z(\lambda)(I - \lambda\Pi_{\mathcal{Y}}Z(\lambda))^{-1} \quad (\lambda \in \mathbb{D}). \tag{4}$$

Hier staan de symbolen $\Pi_{\mathcal{Y}}$ en $\Pi_{\mathcal{U}}$ voor de orthogonale projecties van de Hilbertruimte directe som $\mathcal{Y}\oplus\mathcal{U}$ op $\mathcal{Y}$, respectievelijk op $\mathcal{U}$. Omgekeerd is voor elke Z in de Schurklasse $\mathbf{S}(\mathcal{U},\mathcal{Y}\oplus\mathcal{U})$, de functie H gegeven door (4) een element van $\mathbf{H}^2_{\text{ball}}(\mathcal{U},\mathcal{Y})$. Het is echter niet het geval dat er voor elke H in $\mathbf{H}^2_{\text{ball}}(\mathcal{U},\mathcal{Y})$ een unieke Z in $\mathbf{S}(\mathcal{U},\mathcal{Y}\oplus\mathcal{U})$ bestaat zodat H door (4) gegeven wordt. Dit gebrek aan uniciteit is daarentegen wel precies te beschrijven.

De oplossingen voor het abstracte interpolatieprobleem kunnen nu als volgt worden verkregen: Neem een functie Z in $\mathbf{S}(\mathcal{U},\mathcal{Y}\oplus\mathcal{U})$ zodat $Z(\lambda)|_{\mathcal{F}} = \omega$ voor elke $\lambda \in \mathbb{D}$, de functie H in $\mathbf{H}^2_{\text{ball}}(\mathcal{U},\mathcal{Y})$ gegeven door (4) voldoet dan aan (3) en op deze manier krijgen we alle functies H in $\mathbf{H}^2_{\text{ball}}(\mathcal{U},\mathcal{Y})$ die aan (3) voldoen. Het gebrek aan uniciteit bij de beschrijving van alle functies in $\mathbf{H}^2_{\text{ball}}(\mathcal{U},\mathcal{Y})$ speelt ook hier een rol. Over het algemeen is het niet zo, dat er voor elke oplossing H een unieke Z in $\mathbf{S}(\mathcal{U},\mathcal{Y}\oplus\mathcal{U})$ bestaat met $Z(\lambda)|_{\mathcal{F}} = \omega$ voor elke $\lambda \in \mathbb{D}$, zo dat de oplossing H gegeven wordt door (4). Echter, in sommige gevallen geeft de bovenstaande procedure wel een één-op-één beschrijving van alle oplossingen. Een van de voorbeelden waarbij we wel een één-op-één beschrijving krijgen is de CL-methode.

Via de beschrijving van alle oplossingen van het abstracte interpolatieprobleem krijgen we vervolgens een beschrijving van alle contractieve interpolanten voor de RCL-methode. Deze beschrijving heeft twee minpunten met betrekking tot zijn toepasbaarheid. Ten eerste kunnen we niet zomaar elke Schurklasse-functie Z in de Schurklasse $\mathbf{S}(\mathcal{U},\mathcal{Y}\oplus\mathcal{U})$ nemen. De functie Z moet voldoen aan de extra eis dat $Z(\lambda)| = \omega$ voor elke $\lambda \in \mathbb{D}$. Ten tweede wordt er bij de vertaling van de RCL-methode naar het bijbehorende abstracte interpolatieprobleem een onderliggende contractie ω van de vorm (2) afgeleid. Deze onderliggende contractie speelt een belangrijke rol in de beschrijving van alle contractieve interpolanten en is over het algemeen niet expliciet uit te drukken in de operatoren in de dataset voor de RCL-methode. Om het eerste minpunt te ondervangen merken we op dat de functies Z in $\mathbf{S}(\mathcal{U},\mathcal{Y}\oplus\mathcal{U})$ die voldoen aan $Z(\lambda) = \omega$ voor elke $\lambda \in \mathbb{D}$ beschreven kunnen worden via de formule

$$Z(\lambda) = \omega\Pi_{\mathcal{F}} + D_{\omega^*}V(\lambda)\Pi_{\mathcal{G}} \quad (\lambda \in \mathbb{D}), \tag{5}$$

waar V een functie van de Schurklasse $\mathbf{S}(\mathcal{G}, \mathcal{D}_{\omega^*})$ is zonder verdere beperkingen. Hier staat $\mathcal{G}$ voor het orthogonaal complement van $\mathcal{F}$ in $\mathcal{U}$ en staan D_{ω^*} en $\mathcal{D}_{\omega^*}$ voor de defectoperator en defectruimte van de contractie ω^*. Met enkele algebraïsche manipulaties is de formule voor H in (4), gegeven dat Z van de vorm (5) is, om te schrijven tot een gebroken lineaire vorm van het Redheffer-type:

$$H(\lambda) = \Phi_{2,2}(\lambda) + \Phi_{2,1}(\lambda)V(\lambda)(I - \Phi_{1,1}(\lambda)V(\lambda))^{-1}\Phi_{1,2}(\lambda) \quad (\lambda \in \mathbb{D}),$$

waar de Redheffercoefficïenten $\Phi_{1,1}$, $\Phi_{1,2}$, $\Phi_{2,1}$ en $\Phi_{2,2}$ operatorwaardige analytische functies op $\mathbb{D}$ zijn die uitgedrukt kunnen worden in de onderliggende contractie ω. Door extra eisen te stellen aan de dataset voor de RCL-methode is het mogelijk om een gebroken lineaire vorm van het Redheffer-type voor de oplossingen te krijgen waarbij de Redheffercoefficienten expliciet in de operatoren in dataset uit te drukken zijn. Naast de gebroken lineaire vorm van het Redheffer-type leiden we een beschrijving van alle oplossingen af in de vorm van een klassieke gebroken lineaire vorm.

Aan het eind van de dissertatie passen we de ontwikkelde theorie toe op het Nehari-interpolatieprobleem. We formuleren een getrunkeerde versie van het Nehari-interpolatieprobleem en beschrijven alle oplossingen voor dit probleem. Het Nehari-interpolatieprobleem kan gezien worden als een limiet geval van de getrunkeerd versie. We maken dit in het laatste deel van de dissertatie precies door te laten zien dat er ook in een wel bepaalde zin convergentie van de oplossingen is.