Solutions for Games with Restricted Cooperation

Katsev, I.V.

2009

document version
Publisher's PDF, also known as Version of record

Link to publication in VU Research Portal

citation for published version (APA)
Katsev, I. V. (2009). *Solutions for Games with Restricted Cooperation*. [PhD-Thesis – Research external, graduation internal, Vrije Universiteit Amsterdam]. VU.

Oplossingen voor Spelen onder Restricties voor Samenwerking

I.V. Katsev

Samenvatting

Speltheorie bestudeert situaties waarin meerdere agenten met mogelijk conflicterende doelen optreden. De niet-coöperatieve speltheorie houdt zich voornamelijk bezig met het modelleren van de strategische interactie tussen de agenten. In de coöperatieve speltheorie worden de onderliggende strategische procedures buiten beschouwing gelaten. In plaats daarvan wordt een coöperatief spel gevormd door een verzameling van spelers en een karakteristieke functie die voor elke coalitie van spelers een (maximaal te bereiken) waarde aangeeft. Gegeven een spel concentreert de coöperatieve speltheorie zich op vragen zoals 'welke coalitie wordt gevormd?' en met name de vraag 'hoe wordt de waarde van de gevormde coalitie verdeeld over de leden van de coalitie?'. Een oplossing voor coöperatieve spelen is een functie die voor elk spel een uitbetaling aan elk van de spelers toekent.

De karakterisering van oplossingen door middel van axioma's is een centraal thema in de coöperatieve speltheorie. Een oplossing wordt gekarakteriseerd door een stelsel van axioma's (op een deelklasse van spelen) als het de enige oplossing is die voldoet aan alle axioma's op de betreffende deelklasse. Verschillende stelsels van axioma's leiden in het algemeen tot verschillende oplossingen. Veel oplossingen voldoen aan het efficiëntie axioma, d.w.z. in elk spel wordt de waarde van de grote coalitie, dit is de coalitie die alle spelers bevat, in zijn geheel verdeeld over alle spelers. Twee bekende efficiënte oplossingen op de verzameling van alle spelen zijn de 'Shapley value' en de 'nucleolus'. Andere axioma's zorgen ervoor dat de uitbetaling aan de diverse spelers in het algemeen afhangt van de waarden van alle mogelijke coalities. De waarden van de deelcoalities zijn dus van invloed op de uiteindelijke verdeling van de waarde van de grote coalitie over de spelers. Als voor twee spelers alle coalities met de eerste speler en zonder de tweede speler, hogere waarden hebben dan de overeenkomstige coalities maar waarin de eerste speler is vervangen door de tweede, dan zal in vrijwel elke oplossing de eerste speler een uitbetaling krijgen die minstens zo hoog is als de uitbetaling van de tweede speler. De uitbetalingen volgens de 'Shapley value' worden in hoge mate bepaald door de marginale bijdragen van de spelers, waarbij de marginale bijdrage van een speler aan een coalitie het verschil is tussen de waarde van de coalitie minus de waarde van de coalitie zonder de speler. Een kenmerk van de nucleolus is dat daarbij het minimum van het kleinste surplus over alle niet-lege deelcoalities wordt gemaximaliseerd, waarbij het surplus van een coalitie is gedefiniëerd als de totale uitbetaling aan de spelers van de coalitie minus de waarde van de coalitie.

Behalve de oplossingen zoals hierboven beschreven, kijkt men in de coöperatieve speltheorie ook vaak naar verzamelingen van uitbetalingsvectoren voor een spel die aan bepaalde eigenschappen voldoen, zoals de core en de kernel van een spel. De core is de meest bekende verzameling van uitbetalingsvectoren en bestaat uit alle efficiënte uitbetalingsvectoren, zodanig dat voor iedere coalitie geldt dat de som van de uitbetalingen aan alle spelers in die coalitie minstens gelijk is aan de waarde van de coalitie. Met andere woorden, een uitbetalingsvector in de core van een spel is een efficiënte uitbetalingsvector die voldoet aan groepsstabiliteit, d.w.z. geen enkele coalitie kan een hogere uitbetaling krijgen door zich af te splitsen van de grote coalitie en de eigen waarde te genereren.

In de standaard coöperatieve speltheorie wordt aangenomen dat elke coalitie van spelers kan worden gevormd en de waarde van die coalitie kan realiseren. In veel (economische) situaties is dit echter niet het geval. Het is bijvoorbeeld in veel situaties niet mogelijk dat twee spelers die niet over de mogelijkheden beschikken om met elkaar te kunnen communiceren, wel samen in een coalitie zitten zonder andere spelers via welke zij indirect zouden kunnen communiceren. In zo'n situatie kunnen alleen die coalities worden gevormd waarin elk tweetal spelers in een coalitie met elkaar kunnen communiceren. In bijvoorbeeld hiërarchische situaties komt het voor dat een speler alleen met anderen kan samenwerken in een coalitie als deze coalitie ook minstens één van zijn superieuren (of wellicht alle superieuren) bevat. In 1977 was Nobelprijswinnaar Myerson één van de eersten die dergelijke situaties met beperkte mogelijkheden voor coalitievorming modelleerde en een axiomatisch onderbouwde oplossing introduceerde. Deze oplossing geeft een verdeling van de totale uitbetaling over de spelers, die niet alleen afhangt van de waarden van de coalities, maar ook van de collectie van mogelijke coalities die kunnen worden gevormd.

Myerson modelleerde beperkte communicatie tussen spelers door middel van een graaf op de verzameling van spelers. De mogelijke coalities zijn dan de coalities die verbonden zijn in de graaf. Deze collectie is stabiel onder vereniging, d.w.z. voor elk tweetal coalities in de collectie met een niet-lege doorsnijding geldt dat ook de vereniging in de collectie zit. Een andere interessante eigenschap is geslotenheid onder vereniging, d.w.z. voor elk tweetal coalities in de collectie (dus ook twee disjuncte coalities) geldt dat ook de vereniging in de collectie zit. Een voorbeeld van een collectie die gesloten is onder vereniging is de collectie die wordt verkregen in de eerder genoemde hiërarchische situatie waarin spelers toestemming van superieuren nodig hebben.

Omdat geslotenheid onder vereniging meer eisen oplegt aan de collectie dan stabiliteit onder vereniging, is elke collectie die gesloten is onder vereniging ook stabiel onder vereniging. Aan de ene kant betekent dit dat elke oplossing voor een spel met een collectie van mogelijke coalities die stabiel is onder vereniging, ook kan worden toegepast op een spel met een collectie die gesloten is onder vereniging. De andere kant van de medaille is echter dat een stelsel van axioma's dat een unieke oplossing karakteriseert op de verzameling van spelen met alle collecties die stabiel zijn onder vereniging, niet altijd een unieke oplossing karakteriseert op de kleinere klasse van spelen met alle collecties die gesloten zijn onder vereniging. De reden is dat de kleinere klasse minder restricties oplegt en dat er dus in het algemeen meer eisen moeten opgelegd om de oplossing uniek te bepalen. Uniciteit op een klasse van spelen geeft dus meer informatie over de eigenschappen van een oplossing naarmate de klasse kleiner is.

Axiomatiseringen van oplossingen zijn behulpzaam om een gemotiveerde keuze te kunnen maken welke oplossing in een bepaalde situatie het meest geschikt is. Behalve deze motivatie is het ook van belang om de oplossing voor bepaalde spelen te kunnen berekenen. Hiervoor is het van belang om algoritmen te ontwikkelen die een oplossing in polynomiale tijd berekent. Hoewel het voor de meeste oplossingen onmogelijk is om deze voor alle spelen in polynomiale tijd te kunnen berekenen, is het voor bepaalde deelklassen van spelen wel mogelijk om polynomiale algoritmen te ontwikkelen. Dit is essentieel indien men de oplossing wil toepassen in situaties met een 'groot' aantal spelers.

De belangrijkste thema's van dit proefschrift zijn de karakterisering van oplossingen en het introduceren van algoritmen voor het berekenen van oplossingen voor spelen met beperkingen op de mogelijk te vormen coalities, waarbij de collectie van mogelijke coalities gesloten onder vereniging is. We noemen dit spelen die gesloten zijn onder vereniging.

In hoofdstuk 2 worden de belangrijkste begrippen en oplossingsconcepten uit de coöperatieve speltheorie geïntroduceerd. Daarnaast wordt ook het concept van gerestricteerd spel besproken. In de meeste publicaties over spelen met beperkte coalitie mogelijkheden wordt eerst een gerestricteerd spel gedefiniëerd. Dit is een afgeleid spel waarin alle coalities kunnen worden gevormd, maar waarin de waarden van de coalities die in het oorspronkelijke spel niet kunnen worden gevormd, worden afgeleid van de waarden van de coalities die wel mogelijk zijn. Vervolgens wordt een bekend oplossingsconcept toegepast op het nieuwe afgeleide spel. De andere zeven hoofdstukken zijn verdeeld in twee delen. Deel I bevat de hoofdstukken 3-6 en gaat voornamelijk over oplossingen voor spelen die gesloten zijn onder vereniging. Deel II bevat de hoofdstukken 7-9 en gaat voornamelijk over algoritmen voor het berekenen van de nucleolus voor spelen met een hiërarchische structuur op de verzameling van spelers.

In hoofdstuk 3 wordt voor een spel dat gesloten is onder vereniging eerst de zogenaamde 'superior' graaf geïntroduceerd. De superior graaf associeert met elke collectie van coalities die gesloten is onder verening een hiërarchische structuur. Vervolgens wordt voor het spel met de geassocieerde hiërarchische structuur het bijbehorende gerestricteerde spel afgeleid. Bekende oplossingen voor het gerestricteerde spel geven dan een oplossing voor het oorspronkelijke spel dat gesloten is onder vereniging. In hoofdstuk 4 worden twee nieuwe oplossingen voor spelen die gesloten onder vereniging zijn geïntroduceerd en gekarakteriseerd. De eerste oplossing is gebaseerd op de in hoofdstuk 3 geïntroduceerde superior graaf, in de tweede oplossing wordt de Shapley value toegepast op een standaard spel dat is afgeleid van het spel dat gesloten is onder vereniging door aan elke coalitie de waarde van de (uniek bepaalde) maximaal mogelijke deelverzameling van de coalitie toe te wijzen.

Hoofdstuk 5 wijkt af van de andere hoofstukken in die zin dat in dit hoofdstuk standaard spelen worden beschouwd, waarbij alle coalities mogelijk zijn. Er wordt een nieuwe klasse van oplossingen geïntroduceerd en gekarakteriseerd. Deze klasse van oplossingen is gebaseerd op eigenschappen van de prekernel en de prenucleolus en heeft deze twee bekende oplossingen als extreme elementen. Elke oplossing geeft voor elk spel een verzameling van uitbetalingsvectoren, zodanig dat voor elk spel de prenucleolus een uitbetaling in deze verzameling is, en omgekeerd deze verzameling een deelverzameling van de prekernel is.

In hoofdstuk 6 worden eigenschappen van enkele bekende oplossingen gegeven voor de klasse van zogenaamde 'peer-group' spelen. Een peer-group spel is een additief spel (d.w.z. de waarde van een coalitie is de som van de waarden van de agenten in de coalitie) met een hiërarchische structuur weergegeven door een 'boom': een gerichte graaf met één speler als top en waarin elke andere speler precies één voorganger (superieur) heeft. Een coalitie behoort tot de verzameling van mogelijke coalities als voor elke speler, behalve de top speler, geldt dat ook zijn superieur in de coalitie zit. Het hoofdstuk geeft een karakterisering van de Shapley waarde op deze klasse van spelen, ook worden enkele interessante eigenschappen van de nucleolus gegeven.

In het tweede deel van dit proefschrift zijn voornamelijk algoritmen voor het berekenen van de nucleolus voor specifieke klassen van spelen met beperkte mogelijkheden voor samenwerking ontwikkeld. Er bestaat geen algoritme om de nucleolus te vinden voor een willekeurig spel, maar voor specifieke klassen kunnen wel algoritmen worden ontwikkeld. In hoofdstuk 7 wordt een polynomiaal algoritme geïntroduceerd voor het berekenen van de nucleolus in een spel met als hiërarchische structuur een acyclische gerichte graaf met één top, en waarbij een coalitie mogelijk is als voor elke speler (behalve de top) in de coalitie geldt dat ook minstens één van zijn superieuren in de coalitie aanwezig is. In hoofdstuk 8 wordt aangetoond dat dit algoritme ook kan worden toegepast in situaties dat er meerdere top spelers in de hiërarchische structuur aanwezig zijn, waarbij dan wel meer voorwaarden aan het spel zijn gesteld.

In hoofdstuk 9 tenslotte staat een speciale klasse van spelen centraal, de klasse van zogenaamde 'co-insurance' spelen. Een dergelijk spel geeft een situatie weer waarin een groot risico wordt verzekerd door meerdere verzekeringsmaatschappijen, die zowel het risico als de premie onderling verdelen. Het blijkt dat elk niet-negatief monotoon spel behoort tot de klasse van co-insurance spelen, hetgeen nieuwe inzichten geeft in de klasse van niet-negatieve monotone spelen. In dit hoofdstuk wordt ook het concept van een 'veto-removed' spel geïntroduceerd, een dergelijk spel ontstaat als uit een spel met veto spelers één van de veto spelers wordt verwijderd. Door de klasse van veto-removed spelen te onderzoeken worden nieuwe eigenschappen voor monotone spelen gevonden. In dit hoofdstuk wordt ook een algoritme gegeven om de prenucleolus van een veto-removed spel te vinden.