Self-destructive percolation, invasion percolation and related models

Vágvölgyi, B.

2009

Zelf-destructieve percolatie, invasie percolatie en gerelateerde modellen

In dit proefschrift bestuderen we drie verschillende stochastische modellen: het zelf-destructieve percolatie model, het invasie percolatie model en een stochastische dynamica voor het emergent oneindige cluster model. Deze drie modellen zijn gedefinieerd op $\mathbb{Z}^2$. Dit is een graaf in het platte vlak met als puntenverzameling de punten in het platte vlak met gehele coördinaten en twee punten zijn verbonden in de graaf als hun Euclidische afstand gelijk is aan 1. Elk van de drie modellen geeft een bepaalde tijdsontwikkeling van deelgrafen van $\mathbb{Z}^2$.

Het eerste model, het zelf-destructieve percolatie model, is voortgekomen uit de studie van bepaalde bosbrandmodellen. Stel dat ieder punt van $\mathbb{Z}^2$ een plaats is waar een boom kan groeien. Beschouw een boom die gegroeid is op het punt v. Het cluster behorende bij deze boom is de maximale verzameling van bomen die bereikt kunnen worden vanuit v via een wandeling langs andere bomen waarbij de afstand tussen twee opeenvolgende bomen steeds precies 1 is. Een boom is in een oneindig cluster als het corresponderende cluster oneindig veel bomen bevat. We beginnen in de situatie waarin geen enkele boom aanwezig is. Vervolgens groeit op elk punt in $\mathbb{Z}^2$ een boom met kans $p \in [0, 1]$, onafhankelijk van het groeien van bomen op andere plaatsen. Nadat op bovenstaande wijze het bos gecreeerd is, wordt een deel van het bos vernietigd, bijvoorbeeld door een bosbrand: als er oneindige clusters zijn dan worden alle bomen in deze clusters weer lege plaatsen in het bos. De eindige clusters worden behouden. Na de bosbrand groeien er weer bomen op elke lege plaats en de kans dat er na een bepaalde tijd een boom op een dergelijke plaats groeit is $\delta \in [0, 1]$, wederom onafhankelijk van de andere locaties.

Een voor de hand liggende vraag is wat de kans is dat er een oneindig cluster bestaat in de uiteindelijke configuratie voor een gegeven paar (p, δ). We noteren deze kans met $\Theta(p, \delta)$. In Hoofdstuk 2 bestuderen we de functie $\Theta(p, \delta)$. Computer simulaties suggereren dat er een speciaal lijnsegment $\{\hat{p}\} \times [0, \hat{\delta}]$ bestaat zodanig dat $\Theta(., .)$ niet continu is op $(\hat{p}, \hat{\delta})$. Helaas hebben we geen wiskundig bewijs hiervoor. Het belangrijkste resultaat van Hoofdstuk 2 is dat $\Theta(., .)$ buiten het eerder genoemde lijnsegment wel continu is.

In het tweede model creëren we een stochastische deelgraaf van $\mathbb{Z}^2$ via een groeiproces dat op stochatische wijze verloopt. Iedere kant van $\mathbb{Z}^2$ krijgt een getal toegewezen volgens een bepaalde kansdichtheid. In de eerste stap behoort alleen een speciaal punt van $\mathbb{Z}^2$, genaamd de oorsprong, tot de deelgraaf. In elke volgende stap wordt een nieuwe kant en een nieuw punt toegevoegd volgens het volgende principe: we bekijken de getallen die aan de kanten op de rand van de deelgraaf zijn toegewezen en voegen de kant toe met het kleinste getal. Het eindpunt wordt een nieuw punt in de puntenverzameling van de graaf. Deze procedure wordt oneindig vaak herhaald, wat resulteert in een stochastische deelgraaf van $\mathbb{Z}^2$.

In Hoofdstuk 3 bestuderen we eigenschappen van de verkregen deelgraaf, het zogenaamde veroverde gebied (invaded region), met de nadruk op bepaalde delen van dit gebied: de invasie meren. We leiden machtswetten af voor de verdeling van enkele karakteristieke grootheden met betrekking tot deze meren. We vergelijken ook het veroverde gebied met een andere stochastische graaf, het emergent oneindig cluster en we laten zien dat de modellen op lokaal niveau op elkaar lijken maar significant van elkaar verschillen op globaal niveau.

Het laatste model dat we in dit proefschrift beschouwen is een stochastische dynamiek voor het al eerder genoemde emergent oneindig cluster. Dit cluster is wederom een oneinige stochastische deelgraaf van $\mathbb{Z}^2$ dat via een bepaalde procedure verkregen wordt. Om de kansverdeling van dit cluster te kunnen bestuderen, presenteren we drie dynamische modellen in Hoofdstuk 4 als benadering voor de kansverdeling van het emergent oneindig cluster. Omdat de graaf oneindig is, en een lokale actie kan afhangen van de situatie op zeer grote afstand, is het niet direct duidelijk dat bovenstaande processen bestaan (d.w.z. wiskundig rigoreus geconstrueerd kunnen worden). In Hoofdstuk 4 tonen we het bestaan van de drie dynamische modellen aan door een wiskundig formele constructie te geven.