On Nonseparable Erdos Type Spaces

Valkenburg, K.I.S.

2010

Samenvatting (Dutch Summary)

Over Niet-separabele Erdős Type Ruimten

Topologie is volgens de Van Dale de leer van de eigenschappen van meetkundige figuren bij vervormingen waarbij de samenhang niet verbroken wordt. Een plastisch synoniem voor topologie is dan ook *rubbermeetkunde*. Een figuur of verzameling met een topologische structuur wordt een *(topologische) ruimte* genoemd.

Dit proefschrift bevat een verzameling van resultaten die betrekking hebben op *Erdős type ruimten*, die bovendien niet-separabel zijn. Dergelijke ruimten zijn deelruimten van een reële Banachruimte ℓ^p_μ, waar μ een oneindig kardinaalgetal aanduidt en $p \geq 1$. Deze ruimte ℓ^p_μ is de natuurlijke generalisatie van de Banachruimte ℓ^p (of ℓ^p_ω, met ω de verzameling van natuurlijke getallen inclusief het getal nul) met vectoren in $\mathbb{R}^\mu$, uitgerust met de topologie die wordt voortgebracht door de p-norm. Dit resulteert in een niet-separabele ruimte wanneer μ overaftelbaar is. Om precies te zijn heet een ruimte $\mathscr{E}_\mu$ een Erdős type ruimte wanneer deze geschreven kan worden als

$$\mathscr{E}_\mu = \left\{x \in \ell^p_\mu : x_\alpha \in E_\alpha \text{ voor iedere } \alpha \in \mu\right\},$$

waar $(E_\alpha)_{\alpha\in\mu}$ een collectie is bestaande uit deelverzamelingen van de reële getallen, $\mathbb{R}$.

De ruimte die wordt aangegeven met het symbool $\mathfrak{E}$ is de Erdős type ruimte die bekend staat als de *Erdősruimte*, met $p = 2$, $\mu = \omega$ en $E_\alpha = \mathbb{Q}$ voor iedere $\alpha \in \omega$, oftewel, de deelruimte van alle vectoren in de Hilbertruimte ℓ^2 waarvoor alle coördinaten rationale getallen (breuken) zijn. Wanneer we $p = 2$, $\mu = \omega$ en convergente rijen $E_\alpha = \{0\} \cup \{1/m : m \in \mathbb{N}\}$ invullen, dan verkrijgen we de *volledige Erdősruimte*, genoteerd met het symbool $\mathfrak{E}_c$. Deze ruimten zijn allebei geïntroduceerd in 1940 door Paul Erdős. Hij toonde aan dat ze de merkwaardige eigenschappen bezitten dat ze ééndimensionaal zijn, homeomorf (topologisch equivalent) met hun eigen kwadraat en totaal onsamenhangend. Hieruit volgt dat het kwadraat van bijvoorbeeld $\mathfrak{E}$ nog steeds ééndimensionaal is en niet tweedimensionaal, zoals bijvoorbeeld een vierkant, het kwadraat van een (ééndimensionaal) lijnstuk. De ruimten $\mathfrak{E}$ en $\mathfrak{E}_c$ zijn dan ook belangrijke voorbeelden in de dimensietheorie die in ieder boek over dit onderwerp te vinden zijn.

Ondanks de merkwaardige eigenschappen van bijvoorbeeld de volledige Erdősruimte, kent deze ruimte veel verschijningsvormen. Binnen de dynamica als de eindpuntverzameling van Juliaverzamelingen van zekere exponentiële afbeeldingen (bepaalde fractale verzamelingen), binnen de topologie als de eindpuntverzameling van de Lelekwaaier en binnen de meetkunde als de eindpuntverzameling van de universele separabele $\mathbb{R}$-boom. Deze resultaten zijn het werk van Kawamura, Oversteegen en Tymchatyn.

De ruimte $\mathfrak{E}_c$ komt ook voor binnen de functionaalanalyse, in de gedaante van lijn-vrije zwak gesloten ondergroepen van reflexieve Banachruimten (Dobrowolski, Grabowski en Kawamura) en recentelijk is $\mathfrak{E}_c$ opgedoken binnen de beschrijvende verzamelingenleer: als $\mathscr{I} \neq \emptyset$ een verpoolsbaar F_σ-ideaal betreft op ω, dan is $\mathscr{I}$ voorzien van zijn (unieke) Poolse topologie homeomorf met de volledige Erdősruimte, dan en slechts dan als hij niet nuldimensionaal is. Alle zojuist beschreven resultaten over $\mathfrak{E}_c$ zijn een consequentie van de topologische karakterisering die Dijkstra en Van Mill hebben bewezen. Ook de ruimte $\mathfrak{E}_c^\omega$ is topologisch gekarakteriseerd, door Dijkstra. Het onverwachte resultaat dat $\mathfrak{E}_c$ en zijn aftelbaar oneindige macht, $\mathfrak{E}_c^\omega$, niet homeomorf zijn, is afgeleid door Dijkstra, Van Mill en Steprāns.

Dijkstra en Van Mill hebben bovendien $\mathfrak{E}$ gekarakteriseerd in topologische termen. Een gevolg van deze karakterisering is dat de Erdősruimte homeomorf blijkt met bepaalde homeomorfismegroepen van topologische variëteiten.

Tot dusverre hebben wij alleen separabele ruimten in beschouwing genomen. In het bijzonder hebben wij uitsluitend representaties als Erdős type ruimten beschouwd die op zichzelf een deelruimte vormen van ℓ^p_ω. In de onderhavige dissertatie bestuderen we juist Erdős type ruimten in niet-separabele ℓ^p-ruimten, oftewel ℓ^p_μ waarbij μ overaftelbaar is. We roepen het begrip *gewicht* van een ruimte in herinnering, dat is gegeven door de kleinst mogelijke oneindige kardinaliteit van een basis voor diens topologie. Het gewicht van de ruimte X wordt aangegeven door $w(X)$. Het *lokaal gewicht* van een ruimte X is gedefinieerd als

$$lw(X) = \min\{w(U) : U \text{ een niet-lege open deelverzameling van } X\}.$$

Voor een Erdős type ruimte kunnen de kardinaalfuncties gewicht en lokaal gewicht worden bepaald door de onderliggende collectie van verzamelingen E_α te beschouwen, zoals we laten zien in Hoofdstuk 4.

Hetzelfde geldt voor het bepalen of een Erdős type ruimte al dan niet nuldimensionaal is. Merk op dat voor de Erdősruimte en de volledige Erdősruimte het gewicht en lokaal gewicht gelijk zijn aan ω.

Het zwaartepunt van dit proefschrift ligt in Hoofdstukken 5 en 6, waarin classificatiestellingen worden bewezen voor bepaalde Erdős type ruimten. Het hoofdresultaat in Hoofdstuk 5 zegt dat een Erdős type ruimte $\mathscr{E}_\mu$ met lokaal gewicht λ en gewicht κ, homeomorf is met $\mathfrak{E}_\mathrm{c} \times (\lambda_\mathrm{D})^\omega \times \kappa_\mathrm{D}$ dan en slechts dan als iedere E_α een nuldimensionale G_δ-deelverzameling is van $\mathbb{R}$ en $\mathscr{E}_\mu$ dimensie groter dan nul heeft. In deze classificatie staat bijvoorbeeld κ_D voor de verzameling van kardinaliteit κ met de discrete topologie. Eéndimensionale topologisch volledige Erdős type ruimten geconstrueerd met nuldimensionale verzamelingen E_α, zijn dus homeomorf met een product van de separabele volledige Erdősruimte en een aantal nuldimensionale ruimten met een kardinaliteit die geheel afhangt van de kardinaalfuncties gewicht en lokaal gewicht van de bestudeerde Erdős type ruimte. De aftelbaar oneindige macht van een ééndimensionale volledige Erdős type ruimte blijkt nooit homeomorf te zijn met een volledige Erdős type ruimte, waarmee we het eerdergenoemde resultaat uitbreiden van Dijkstra, Van Mill en Steprāns.

In Hoofdstuk 6 bewijzen we een classificatiestelling voor Erdős type ruimten die meer op de Erdősruimte lijken. Een consequentie van de karakterisering van $\mathfrak{E}$ door Dijkstra en Van Mill is dat een ééndimensionale Erdős type ruimte $\mathscr{E}_\omega$ die geconstrueerd is met nuldimensionale $F_{\sigma\delta}$-deelverzamelingen van $\mathbb{R}$, waaronder oneindig vele die van de eerste categorie in zichzelf zijn, homeomorf is met $\mathfrak{E}$. Het hoofdresultaat van Hoofdstuk 6 breidt dit uit en gaat over Erdős type ruimten $\mathscr{E}_\mu$ geconstrueerd met verzamelingen E_α, waaronder oneindig vele die van de eerste categorie in zichzelf zijn. Een dergelijke ruimte $\mathscr{E}_\mu$, met lokaal gewicht λ en gewicht κ, is homeomorf met $\mathfrak{E} \times (\lambda_\mathrm{D})^\omega \times \kappa_\mathrm{D}$ dan en slechts dan als iedere E_α een nuldimensionale $F_{\sigma\delta}$-deelverzameling is van $\mathbb{R}$ en $\mathscr{E}_\mu$ dimensie groter dan nul heeft.

In Hoofdstukken 7 en 8 beschouwen we twee eerdergenoemde generalisaties van representaties van de volledige Erdősruimte. Hoofdstuk 7 behandelt idealen die voortgebracht worden door submaten op overaftelbare kardinaalgetallen, waarvoor we de link onderzoeken met niet-separabele volledige Erdősruimten. Hoofdstuk 8 tenslotte, gaat over representaties van Erdős type ruimten als eindpuntverzamelingen van bepaalde niet-separabele $\mathbb{R}$-bomen en universaliteitseigenschappen.