Invariant measures and limiting shapes in sandpile models

Liu, H.

2011

Samenvatting (Dutch Summary)

Invariante maten en limietvormen voor zandhapen

Dit proefschrift bestudeert drie zandhoopmodellen: het CBTW model, het meervoudige toevoeging-zandhoopmodel, en Zhang's zandhoopmodel. Zoals vermeld in Hoofdstuk 1 is de oorspronkelijke motivatie van zandhoopmodellen het bestuderen van 'self-organized criticality'. De simpele regels van zandhoopmodellen maken het mogelijk om ze rigoreus te behandelen. De diverse zandhoopmodellen hebben overeenkomsten en verschillen. Hieronder geven we een vergelijking van de eindig volume-modellen uit dit proefschrift.

Ten eerste, ieder van de zandhoopmodellen bestaat uit een aantal basiselementen: de *configuratieruimte*, de *grenswaarde*, en de *topplingregel*. In het klassieke BTW model kan de hoogte van een punt alleen niet-negatieve integer waardes aannemen, terwijl in zowel het CBTW als Zhang's model de hoogte iedere niet-negatieve reële waarde kan aannemen. De grenswaarde is $2d$ in het BTW model in dimension d, 1 in het CBTW model en in Zhang's model in iedere dimensie. Zowel in het BTW model als in het CBTW model is het zo dat als een punt toppelt, dit punt de grenswaarde aan massa verliest en ieder van zijn buren een fractie $1/2d$ daarvan krijgt; maar in Zhang's model verliest het toppelende punt alle massa, en ieder van zijn naaste buren krijgt een fractie $1/2d$ daarvan. Die hoeveelheid hangt af van de hoogte van het topplende punt. Daarom zijn zowel BTW als CBTW topplings abels, maar Zhang's topplings zijn dat niet.

Ten tweede, de evolutie van de modellen is gekarakteriseerd door: de *graaf* Λ, een eindig deelverzameling van het rooster $\mathbb{Z}^d$ in alle drie deze modellen; *de manier waarop het toevoegpunt gekozen wordt* en *de toegevoegde hoeveelheid*. In alledrie deze zandhoopmodellen wordt iedere tijdstap het toevoegpunt gekozen uit Λ met uniforme kans. In het BTW model is de toegevoegde hoeveelheid altijd 1. In het BTW-k model is de toegevoegde hoeveelheid altijd een vast niet-negatief geheel getal k, en in het BTW-K model is het een toevallig getal verdeeld over een verzameling K van niet-negatieve gehele getallen. Zowel in het CBTW model en in Zhang's model is de toegevoegde hoeveelheid stochastisch, uniform verdeeld op een interval $[a, b]$, waar a, b twee reële getallen zijn met $0 \leq a \leq b < 1$. Tijdens de evolutie zijn alle toevoegpunten en toegevoegde hoeveelheden onafhankelijk van elkaar in alledrie deze modellen. Tabel 5.1 is een overzicht van de zandhoopmodellen die bestudeerd zijn in dit proefschrift.

We geven nu een korte samenvatting van de resultaten in dit proefschrift. De wiskundige behandeling van het CBTW model is in hoofdstuk 2. We leiden eerst af dat de uniforme maat μ op de zogenaamde 'toegestane configuraties' invariant is onder de dynamica. We laten met koppeling-ideeën zien dat als $a < b$, dan zal, startend van een willekeurige beginconfiguratie, het proces convergeren in verdeling naar μ. Daarom is dat de unieke invariante maat voor het proces. Als $a = b$, dat wil zeggen, als de toevoeging niet random is, en $a \notin \mathbb{Q}$, dan is het nog steeds zo dat μ de unieke invariante maat is, maar in dit geval gebruiken we random ergodentheorie om dit te bewijzen; dit bewijs gaat op een heel andere manier. Sterker nog, de koppeling-aanpak kan niet werken in dit geval omdat we ook het ietwat verrassende feit bewijzen dat als $a = b \notin \mathbb{Q}$, het proces helemaal niet in verdeling convergeert, startend van een willekeurige beginconfiguratie.

In Hoofdstuk 3 geven we formele definitie van het meervoudige toevoeging-zandhoopmodel. We zijn weer geinteresseerd in de convergentie van het proces en de uniciteit van de invariante maat. Voor een algemene graaf $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ en elk niet-negatief geheel getal k, convergeert het BTW-k proces in verdeling. Voor elke graaf $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ kunnen we oneindig veel k en k' vinden, zodanig dat het BTW-k model een unieke invariante maat heeft, terwijl het BTW-k' model er vele heeft. In dimensie 1 hebben we meer resultaten. Neem $\Lambda = \{1, 2, \ldots, N\} \subset \mathbb{Z}$ en $k \in \mathbb{N}$ met $q = k \bmod (N + 1)$. In het BTW-k model kan de set van recurrente configuraties verdeeld worden in $\gcd(q, N+1)$ verschillende gesloten (onder het proces) subsets, en de uniforme maat op deze subsets is invariant onder het proces. Als K een deelverzameling is van $\mathbb{N}$ en $q_k = k \bmod (N + 1)$ voor alle $k \in K$, dan heeft het BTW-K model $\gcd(N+1, q_k, k \in K)$ verschillende recurrente klasses, en de uniforme maat op elk van deze recurrente klasses is invariant onder het proces.

De resultaten gerelateerd aan Zhang' model staan in Hoofdstuk 4 en Hoofdstuk 5. In Hoofdstuk 4 laten we zien dat als $\Lambda \subset \mathbb{Z}$ met $|\Lambda| = N$, dan heeft Zhang's model een unieke invariant maat voor alle $0 \leq a < b \leq 1$. Verder onderzoeken we ook het oneindig volume Zhang's zandhoopmodel in dimensie $d \geq 1$. We bestuderen stabiliseerbaarheid van beginconfiguraties gekozen volgens een bepaalde maat μ. We laten zien dat voor een stationaire ergodische maat μ met dichtheid ρ, μ stabiliseerbaar is voor alle $\rho < \frac{1}{2}$; μ is niet stabiliseerbaar is voor alle $\rho \geq 1$; voor $\frac{1}{2} \leq \rho < 1$, als ρ dichtbij $\frac{1}{2}$ of 1 is, dan kunnen beide mogelijkheden voorkomen.

In Hoofdstuk 5 komen we bij een nogal verschillend onderwerp gerelateerd aan Zhang's zandhoopmodel. We definiëren een groeimodel waarin de massa kan splitsen met Zhang's toppleregel. De beginconfiguratie bevat een grote massa $n > 1$ in de oorsprong en $h < 1$ op ieder ander punt van $\mathbb{Z}^d$. Als een punt tenminste massa 1 heeft, dan is het instabiel en kan het splitsen met Zhang's toppelregel. De massa kan zich alleen verspreiden met splitsingen. Als $h < \frac{1}{2}$, dan is het model robuust en als $h > 1 - \frac{1}{2d}$, dan is het model explosief.

Als $d \geq 2$, en als we de parallelle toppelvolgorde kiezen, dan bestaan er constanten $C_d < 1 - \frac{3}{4d+2}$, zodanig dat als $h > C_d$ en n groot, dan stopt het splitsproces niet. Aangezien $1 - \frac{3}{4d+2} < 1 - \frac{1}{2d}$, is met de parallelle toppelvolgorde het interval van h waarvoor het splitsproces niet stopt een beetje groter dan met willekeurige splitsvolgorde. Met de parallelle topplevolgorde en voor h zodanig dat het splitsproces niet stopt, zijn er verscheidene limietvormen waaronder een ruit, een vierkant en een octagon. Voor $h < 0$ kunnen we binnen- en buitengrenzen vinden voor de set van sites die getoppeld hebben.