

VU Research Portal

Bifurcations in Network Dynamical Systems

Nijholt, E.C.

2018

document version

Publisher's PDF, also known as Version of record

[Link to publication in VU Research Portal](#)

citation for published version (APA)

Nijholt, E. C. (2018). *Bifurcations in Network Dynamical Systems*.

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal ?

Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

E-mail address:

vuresearchportal.ub@vu.nl

CHAPTER 7

SAMENVATTING

Dit proefschrift beschrijft een nieuwe manier om naar netwerk dynamische systemen te kijken; een manier gebaseerd op *verborgen symmetrie*. Het idee is dat een grote klasse van netwerk dynamische systemen gezien kan worden als de restrictie van een groter systeem met meer symmetrie. Deze symmetrie ligt ‘verborgen’ op twee manieren. De belangrijkste is dat ze vaak niet aanwezig is in het oorspronkelijke systeem, maar alleen in deze grotere ‘lift’. Desalniettemin heeft de symmetrie grote gevolgen voor de dynamica van het oorspronkelijke systeem en kan ze gebruikt worden om veel van de ongewone eigenschappen van netwerk dynamische systemen te verklaren. De tweede is dat de symmetrie afwijkt van de ‘klassieke’ notie, waarbij ze altijd afkomstig is van een groep. Wat blijkt is dat de symmetrie in netwerksystemen vaak door middel van niet-inverteerbare transformaties plaatsvindt. Hierdoor kan deze symmetrie niet afkomstig zijn van een groep, maar hooguit van een semigroep of monoïde (een semigroep met identiteit).

Het inhoudelijke deel van dit proefschrift is opgebouwd uit vier hoofdstukken, die ieder een op zichzelf staand wetenschappelijk artikel vormen. In de eerste hiervan worden de belangrijkste ideeën geïntroduceerd in de visuele taal van de *graafvezelingen*. Dit zijn natuurlijke afbeeldingen tussen netwerk grafen die de relevante structuur bewaren. Het belangrijkste uitgangspunt is dat er een correspondentie (een ‘functor’) bestaat tussen netwerk grafen en netwerk dynamische systemen. Zo is de voorgenoemde ‘lift’ niets anders dan een ‘quotient-vezeling’ tussen het oorspronkelijke netwerk en diens zogeheten

fundamentele netwerk. De daadwerkelijke symmetrieën zelf zijn niets anders dan ‘zelf-vezelingen’ in dit fundamentele netwerk.

Daar een symmetrie in een dynamisch systeem simpelweg oplossingen naar oplossingen stuurt, geeft het een schat aan informatie voor de dynamica van het systeem. Het blijkt dat men nog een stap verder kan gaan. Door de klasse van netwerk vectorvelden ietwat te vergroten, vindt men een nieuwe netwerkstructuur die volledig bepaald is door de symmetrie. Met andere woorden, het netwerk heeft niet zomaar (verborgen) symmetrie, maar representeert precies alle vectorvelden met deze eigenschap. Wat dit betekent is dat de wiskundig vaak ‘onhandige’ netwerkstructuur nu equivalent is aan de veel beter begrepen notie van symmetrie. In het tweede artikel wordt deze correspondentie gebruikt om de techniek van het vinden van een *centrum-variëteit* aan te passen naar netwerken. In het bijzonder zal blijken dat de zogeheten *gereduceerde vectorvelden*, welke men krijgt na het toepassen van deze techniek, in zekere zin weer een netwerkstructuur hebben. Bovendien bewaren ze informatie over *synchronie*, het fenomeen waarbij verschillende cellen in een netwerk zich hetzelfde gedragen. Deze techniek maakt het mogelijk om uitspraken te doen over *generiek* gedrag in systemen met een gegeven netwerkstructuur. In het bijzonder werpt het een licht op de vele ongewone *bifurcaties* (plotselinge, ingrijpende veranderingen) die generiek optreden in de dynamica van veel netwerksystemen.

Het derde artikel bouwt voort op het tweede door gebruik te maken van het inherent algebraïsch karakter van symmetrie. Het belangrijkste resultaat is dat speciale delen van een netwerk, de zogeheten *projectie-blokken*, wegge laten mogen worden om zodoende kleinere netwerken te verkrijgen. Iedere generieke bifurcatie die plaatsvindt in dit kleinere netwerk, vindt ook plaats in het originele (met hooguit één goed begrepen uitzondering). Als voorbeeld wordt deze techniek gebruikt om de bifurcaties in een generalisatie van het zogeheten *feed-forward netwerk* te begrijpen. Dit alles kan gezien worden als een eerste stap naar een geheel ‘modulaire’ omschrijving van netwerk dynamische systemen. Eén waarbij elk netwerk in kleinere componenten geknipt kan worden, die allemaal iets prijsgeven over het oorspronkelijke netwerk.

Tot slot is het laatste artikel gewijd aan het bewijzen van een technisch resultaat over bifurcaties in systemen met een ongewone symmetrie. Er wordt aangetoond welke zogenoemde generaliseerde kernen en centrum deelruimtes men generiek kan verwachten bij een bifurcatie met een monoïde symmetrie, en in een willekeurige aantal parameters. Dit betekent dat alle andere op-

ties weggelaten mogen worden in een analyse, omdat ze ‘in de praktijk’ niet voor kunnen komen. In het bijzonder wordt er een bewijs gegeven voor het vermoeden dat een bifurcatie van stationaire punten, in één parameter, generiek plaatsvindt langs één zogeheten ondeelbare representatie van reëel type. Door het voorgaande heeft deze stelling direct toepassingen in het analyseren van netwerk dynamische systemen. Bovendien zijn er nog vele andere toepassingen, zoals in systemen met zogenoemde niet compacte Lie-groep symmetrie. Dit resultaat wordt behaald door naar de ruimte van alle symmetrie bewarende, lineaire afbeeldingen te kijken. Vervolgens worden hierin die geïdentificeerd welke een gegeneraliseerde kern of centrum deelruimte hebben die gelijkvormig is aan een gevraagde deelruimte.